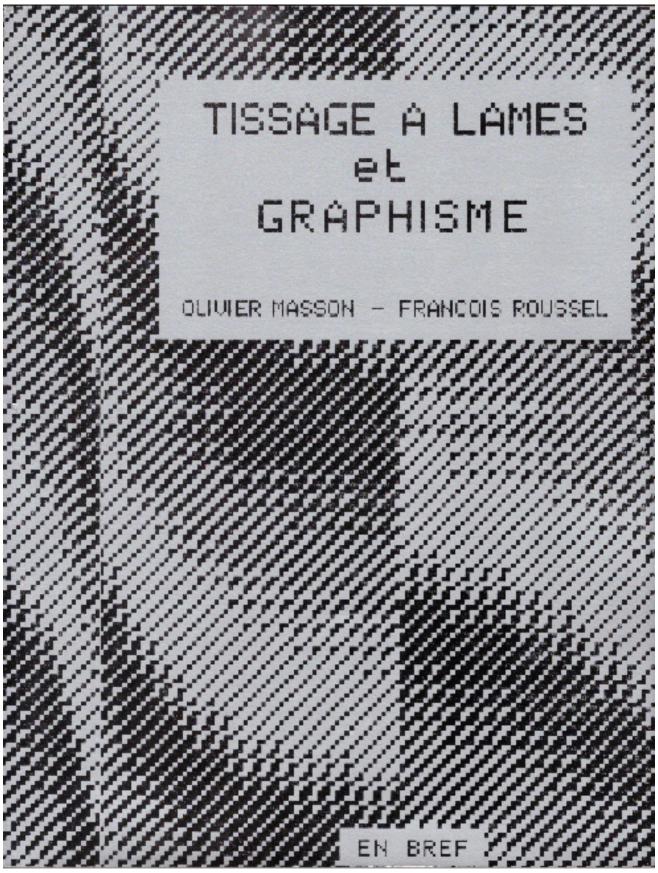
Auteur : Olivier Masson http://oliviermasson.art
Date : mai 2023

Résumé :

Cet article reprend un large passage du livre [Tissage à lames et graphisme](#) , d'Olivier Masson et François Roussel, publié pour la première fois en 1987 aux éditions En Bref.
La première partie, à partir du chapitre 2, et le A de la deuxième partie ; de la page 31 à 108.

Il introduit et développe un modèle mathématique du tissage armuré, basé sur les relations.



Le livre [Tissage à lames et graphisme](#)

PREMIèRE PARTIE

MODELES MATHEMATIQUES DU DIAGRAMME DE TISSU

B REPRESENTATION TYPE CARTON-RENTRAGE-DIAGRAMME DE TISSU

B REPRESENTATION TYPE CARTON-RENTRAGE-DIAGRAMME DE TISSU

Chapitre 2
Représentation du diagramme de tissu à l'aide de relations

Plusieurs modèles mathématiques du tissage armuré ont été développés, avec pour base les fonctions numériques réelles ou les équations paramétrées. S'ils peuvent éclairer certains aspects du tissu : son sens de variation, sa pente ou inclinaison, l'influence d'un étirement du rentrage ou du pédalage, la séparation du tissu en différentes surfaces, etc. On peut cependant en faire deux critiques fondamentales :

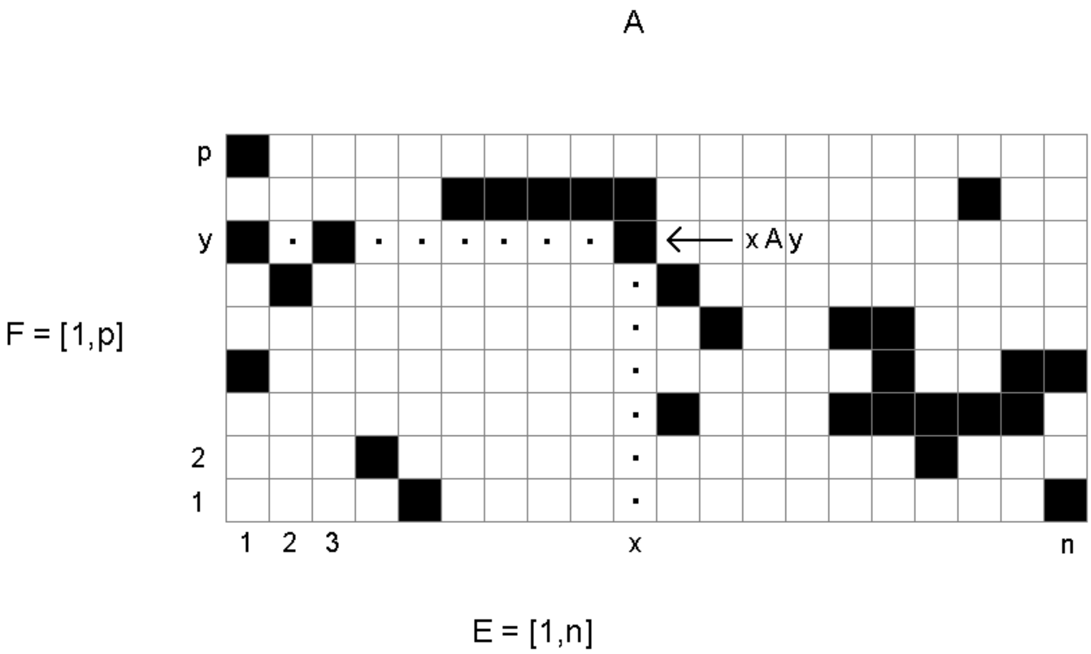
- Les diagrammes y sont représentés par des courbes. Ce type de représentation convient pour les rentrages, mais est incapable de tenir compte de l'entière réalité d'une marchure ou d'un attachage où toute la surface du diagramme comporte des informations. Ces modèles sont donc limités à la description de la courbe graphique d'un tissu, éventuellement considérée comme le séparant en plusieurs surfaces.
- Les courbes étudiées sont définies sur des ensembles infinis et sont continues au moins par morceaux. Or la réalité du tissage est tout autre : il y a un nombre fini de fils, de cadres, de duites ou de cartons. Le fait de travailler sur des ensembles infinis de points ne nous permet pas d'étudier un point particulier : par exemple déplacer un cadre, ce qui affecte grandement un tissu, n'aurait pas de sens dans ce modèle.

Pour ces raisons nous allons construire un nouveau modèle mathématique du tissu, plus près de la réalité du tissage, en particulier un modèle digital, traitant des ensembles finis.
Cette étude demande une familiarité plus grande avec les mathématiques, cependant ses résultats peuvent être exprimés d'une manière intuitive accessible à tous.

1- REPRéSENTATION D'UN DIAGRAMME PAR UNE RELATION

a) Représentations des diagrammes par des relations.

Dans la pratique du tissage on numérote les fils, duites, cadres et cartons à partir de 1 ; aussi choisirons-nous comme ensembles de travail des intervalles de N (l'ensemble des entiers naturels) de la forme : [1, n] = (1,2,...,n-1,n).



Nous considérerons un diagramme A, rectangle de papier quadrillé, de n colonnes et de p lignes, comme le graphe d'une relation de E = [1,n] dans F = [1,p].
Les colonnes sont numérotées de gauche à droite, à partir de 1.
Les lignes sont numérotées de bas en haut, à partir de 1.
L'ensemble de départ sera donc dessiné sur la largeur et l'ensemble d'arrivée sur la hauteur. Une case (x, y) noire, ou une croix dans la case (x, y), indiquera que x est en relation avec y par la relation A, on notera x A y (Attention au sens (x, y) est différent de (y, x), on pourra avoir x A y et pas y A x).

Case du diagramme de coordonnées (x, y) noire (contient une croix) <=> x A y

2- DEUX CONDITIONS RESTRICTIVES SUR LES RELATIONS éTUDIéES

Dans un souci de simplification des résultats et d'adaptation à la réalité pratique du tissage, nous nous limiterons à l'étude des diagrammes possédant les deux propriétés suivantes :

a) le diagramme ne contiendra aucune colonne vide.
Nous dirons alors que la relation A de E vers F est partout définie :

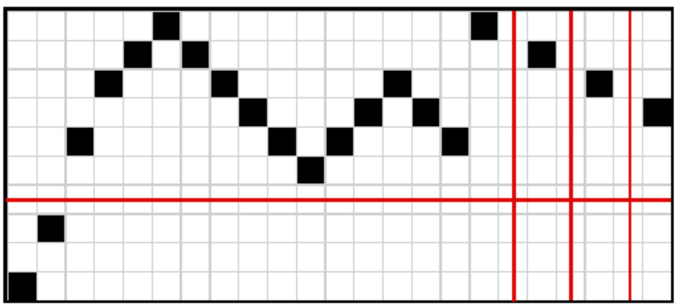
$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad x \, A \, y$$

b) le diagramme ne contiendra aucune ligne vide
Nous dirons alors que la relation A de E vers F est surjective :

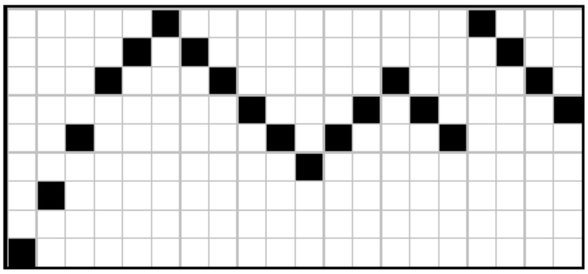
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad x \, A \, y$$

En tissage, ces deux conditions sont toujours réunies :
Dans un diagramme de marchure on ne saute pas de duite, on n'écrit pas de marche qui ne serve à rien.
Dans un diagramme de rentrage tous les fils sont rentrés et tous les cadres sont utilisés.
Dans un diagramme d'attachage chaque marche commande au moins un cadre et chaque cadre est commandé par au moins une marche.

Toutefois nous rencontrerons, au cours de notre étude, des diagrammes comportant des lignes ou des colonnes vides. En procédant à la digitalisation d'une courbe ou à son approximation sur un réseau d'initiales.



Une relation non surjective et non partout définie



Une relation surjective et partout définie

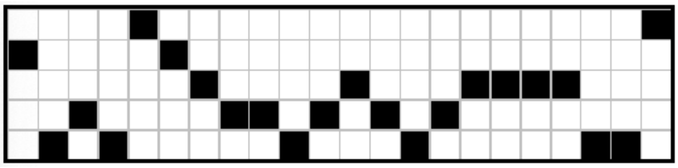
Ces diagrammes peuvent clairement être ramenés à des diagrammes répondant aux conditions ci-dessus en supprimant les lignes ou colonnes vides. Leurs propriétés seront identiques (aux trous près), toutefois leurs propriétés graphiques peuvent être masquées.

Les relations étudiées par la suite seront donc supposées partout définies et surjectives, sauf indication contraire. Leurs diagrammes ne comporteront donc ni ligne ni colonne vide.

3- QUELQUES DéFINITIONS

a) Nous dirons d'une relation A de E vers F qu'elle est une application si et seulement si

$$\forall x \in E \quad \exists ! y \in F \quad x A y$$



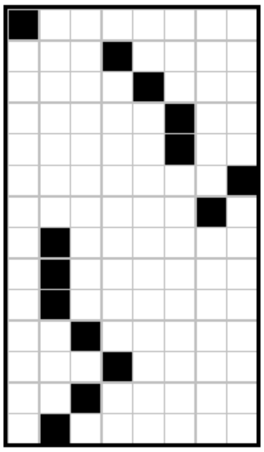
Une relation est une application si et seulement si
son diagramme contient une croix et une seule par colonne.

En tissage, un diagramme de rentrage possède toujours cette propriété. En effet tous les fils sont rentrés dans un cadre et un seul. Un diagramme de rentrage est donc une application (surjective, comme le sont supposées ici toutes les relations). Pourtant pour conserver la généralité de notre propos, nous considérerons également par la suite, le cas de diagramme de rentrage quelconque, ne répondant pas à la propriété d'un vrai rentrage.

b) Nous dirons d'une relation A de E vers F qu'elle est injective si et seulement si

$$\forall y \in F \quad \forall (x, x') \in E^2 \quad x A y \text{ et } x' A y \Rightarrow x = x'$$

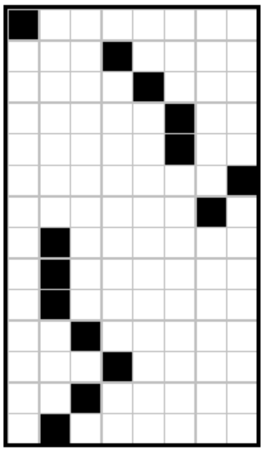
Une relation injective est donc une relation qui ne comporte pas plus d'une croix par ligne. Comme nous supposons nos relations surjectives (une croix au moins par ligne), nous pouvons énoncer :



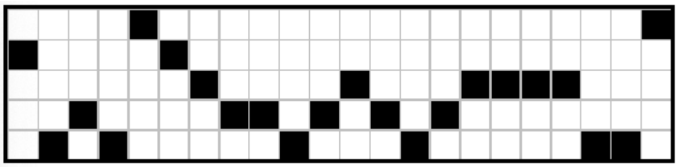
Une relation est injective si et seulement si
son diagramme contient une croix et une seule par ligne.

Remarque : on parlera également d'injection pour une relation injective. Usuellement le terme d'injection est réservé aux applications, il est clair que nous considérerons ici des relations injectives qui ne sont pas des applications (une injection pourra avoir plusieurs croix par colonne).
Comme nous ne considérons que des relations partout définies surjectives, les notions d'application et d'injection sont parfaitement symétriques : l'une concernant les colonnes et l'autre les lignes du diagramme.

Un diagramme rectangulaire d'injection aura obligatoirement plus de lignes que de colonnes. En effet, imaginons qu'il y ait plus de colonnes que de lignes. Comme la relation est partout définie, il y a au moins une croix par colonne. Il y aurait plus de croix que de lignes et donc au moins une ligne contenant plus d'une croix. La relation ne serait donc pas injective.



Injection
<=> Une croix et une seule par ligne
Injection => largeur ≤ hauteur



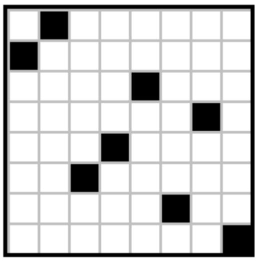
Application
<=> Une croix et une seule par colonne
Application => largeur ≥ hauteur

De la même manière, une application rectangulaire, qui est supposée surjective, aura obligatoirement plus de colonnes que de lignes.

Quand advient-il des applications et des injections carrées ?

c) Nous dirons d'une relation A de E vers F qu'elle est bijective si et seulement si elle est à la fois une application et une injection.

Une relation est bijective si et seulement si son diagramme contient une croix et une seule par ligne et par colonne.



Bijection
<=> Une croix et une seule par ligne et par colonne
Bijection => largeur = hauteur

Un diagramme de bijection contient donc autant de croix que de lignes et que de colonnes ; il est carré.

Réciproquement considérons un diagramme carré, comportant une croix et une seule par ligne, ou, une croix et une seule par colonne. Nos relations sont supposées partout définies et surjectives, c.-à-d. contenant au moins une croix par colonne et par ligne. Un tel diagramme aura donc une croix et une seule par ligne et par colonne ; c'est une bijection.

Application carrée	<=>	Bijection
Injection carrée	<=>	Bijection
Application et injection	<=>	Bijection

d) Parallèle entre le langage du tissage et le celui des mathématiques.

Un diagramme est un rectangle de papier quadrillé, il a une largeur et une hauteur.
Chaque case peut être noire ou blanche (cochée ou non cochée).
Les colonnes sont numérotées de gauche à droite, à partir de 1.
Les lignes sont numérotées de bas en haut, à partir de 1.
Quand il est considéré seul on parlera d' "armure", c'est un "point" de tissage.
Il est considéré alors comme un potentiel diagramme de tissu.
Sa largeur est le "rapport en largeur" de l'armure et sa hauteur son "rapport en hauteur".

Un diagramme est représenté par une relation.
Case du diagramme A de coordonnées (x, y) noire <=> x A y x est en relation avec y par A

Quand le diagramme a une fonction précise le vocabulaire change.

Si c'est un "diagramme de tissu".
Les colonnes représentent les fils de chaîne.
Les lignes représentent les fils de trame. Une ligne est aussi une duite, on passe un fil de trame dans la foule formée par les fils de chaîne.
Une case de papier quadrillé représente une "croisure", c'est-à-dire l'intersection d'un fil de chaîne vertical et d'un fil de trame horizontal.
Une case noire est un "levé". Le fil de chaîne est levé, le fil de trame passant au-dessous.

Une case blanche est un "baissé". Le fil de chaîne est baissé, le fil de trame passant au-dessus.
La largeur du diagramme de tissu est égale à la largeur du rentrage.
La hauteur du diagramme de tissu est égale à la hauteur du carton.
Un flotté chaîne est une suite de points noirs consécutifs verticaux.
Un flotté trame est une suite de points blancs consécutifs horizontaux.
Le terme "Tissu" nomme l'ensemble des diagrammes représentant un calcul de tissu (Carton - Rentrage - Diagramme de tissu et éventuellement Attachage)
On utilise souvent simplement le terme de "tissu" pour "diagramme de tissu" quand le contexte ne permet pas d'ambiguïté.

Si c'est un "Rentrage" (remettage).
Les colonnes représentent les fils de chaîne.
Les lignes représentent les cadres.
Une case noire indique que le fil de chaîne de la colonne est enfilé dans le cadre (dans la lisse portée par le cadre) de la ligne.
Chaque fil est enfilé dans un cadre et un seul.
Le rentrage est une Application

Si c'est un "Carton".
Les colonnes représentent les pédales (marches) ; ou tout autre dispositif commandant la lève des cadres : ratière à picots, cartons perforés, ratière électronique.
Les lignes représentent les duites ; à chaque duite on passe un fil de trame.
Chaque pédale, de numéro n, commande le cadre de la ligne de même numéro n.
La largeur du carton est égale à la hauteur du rentrage.
Une case noire indique que pour cette duite, sur la ligne, la pédale de la colonne lève le cadre de la ligne de même numéro que la colonne.

Si c'est un "Attachage".
Les colonnes représentent comment les marches (pédales) sont "attachées" aux cadres.
Les lignes représentent les cadres.
La hauteur de l'attachage est égale à la hauteur du rentrage.
Une case noire indique que la marche de la colonne est attachée au cadre de la ligne.
Si la pédale est levée pour une duite, les cadres marqués en noir dans cette colonne de l'attachage seront levés.

Si c'est une "Marchure". On suppose alors qu'il existe un attachage.
La marchure est un carton qui commande les cadres via l'attachage.
Les colonnes représentent les marches (pédales) qui sont "attachées" à un ou plusieurs cadres comme indiqué dans l'attachage.
La largeur de la marchure est égale à la largeur de l'attachage.
Les lignes représentent les duites ; à chaque duite on enfonce une ou plusieurs marches.
Une case noire indique que la marche est levée pour une duite, les cadres marqués en noir dans cette colonne de l'attachage seront levés.
On pourra être amené à considérer des marchures où chaque duite lève une et une seule marche.
La marchure est alors injective.

4- COMPOSITION DES RELATIONS

a) Définition

Etant données une relation A, de E vers F : $E \xrightarrow{\quad A \quad} F$

et une relation B, de F vers G : $F \xrightarrow{\quad B \quad} G$

telles que B ait pour ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée de A ;
ou encore, telles que la largeur de B soit égale à la hauteur de A ,
on peut définir une relation, de E vers G, appelée composée de A suivi de B, notée B o A (lire B rond A), par :

$$B \circ A = (\, (x, z) \in ExG \ / \ \exists\, y \in F \qquad x\,A\,y \ \text{ et } \ y\,B\,z \ )$$

$$\forall\, (x, z) \in ExG \qquad x \ BoA \ z \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, y \in F \quad x\,A\,y \ \text{ et } \ y\,B\,z$$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\qquad A \qquad} & F & \xrightarrow{\qquad B \qquad} & G \\ x & & y & & z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\qquad\qquad B \circ A \qquad\qquad} & G \\ x & & z \end{array}$$

B o A est une relation de E vers G ; la largeur de B o A est donc égale à la largeur de A, la hauteur de B o A est égale à la hauteur de B.

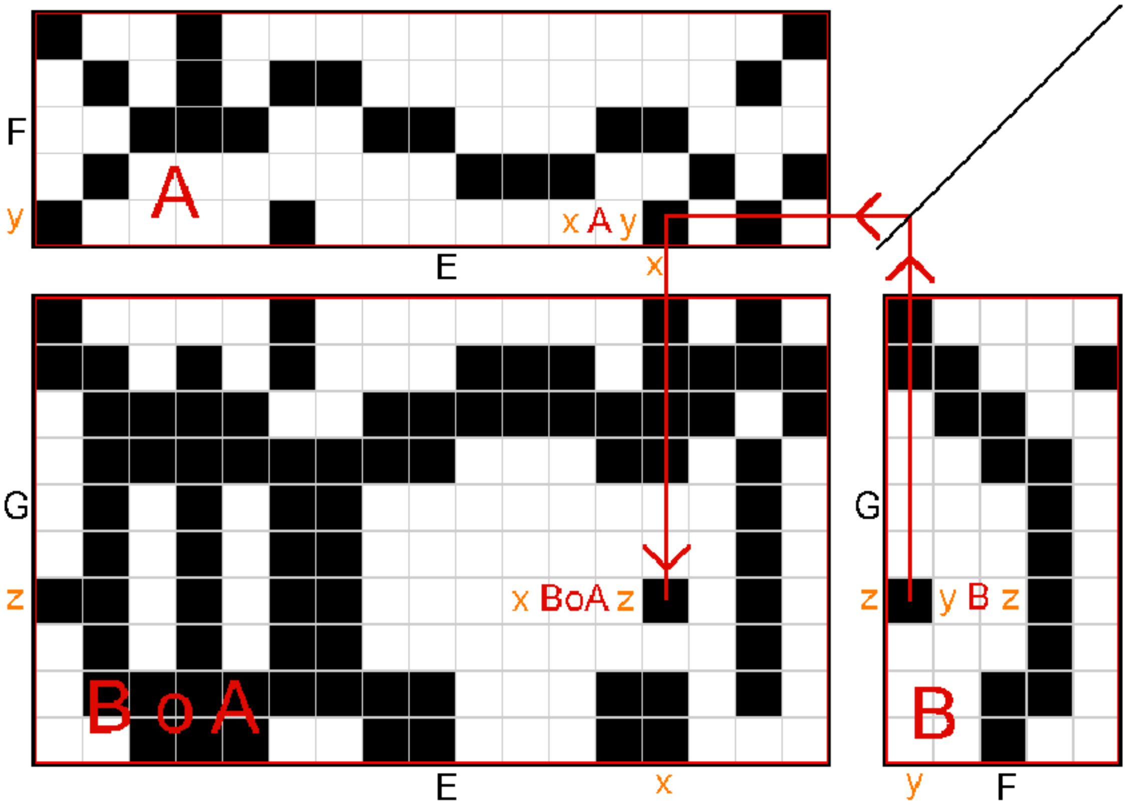
Pour qu'un élément x de E soit en relation par B o A avec un élément z de G, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un élément y de F qui soit à la fois en relation avec x par A et avec z par B. Cet élément n'est pas en général unique. Pour trouver tous les éléments de G qui sont en relation par BoA avec un x de E, il suffit de chercher tous les éléments de F en relation avec x par A, puis tous les éléments de G en relation par B (Avec ces mêmes éléments de F).

Attention au sens des relations. L'élément y de F correspond à une ligne de A et à une colonne de B. La diagonale dessinée dans le prolongement de A et de B nous permet d'établir la correspondance entre les lignes de A et les colonnes de B. Cette diagonale est bien sûr carrée, la largeur de B étant égale à la hauteur de A.

Si l'on représente les relations par des diagrammes de papier quadrillé, on représentera la composition des relations en disposant le diagramme A en haut à gauche, le diagramme B en bas à droite et le résultat B o A en bas à gauche, sous le diagramme A et à gauche du diagramme B.

On visualise ainsi que la hauteur de A est égale à la largeur de B, la première diagonale faisant le lien, que la largeur de B o A est égale à la largeur de A et que la hauteur de B o A est égale à la hauteur de B.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & \\ B \circ A & B \arrow[ul] \end{tikzcd}$$



La relation B o A est la composée de A suivi de B

Notons que si A et B sont partout définies et surjectives, B o A est également partout définie et surjective. De plus la composition des relations est associative :

C o (B o A) = (C o B) o A   que l'on notera :   C o B o A

La composition des relations n'est pas commutative. On ne peut composer des relations dans les deux sens : B o A et A o B, que pour des relations carrées et en général B o A est différent de A o B. Dans la pratique du tissage on manipule des diagrammes rectangulaires et la plupart du temps aucune ambiguïté n'est possible ; on se gardera pourtant de tous calculs abusifs.

Dans les calculs il faudra toujours s'assurer que la composition des relations que l'on écrit existe.
B o A existe <=> La largeur de B est égale à la hauteur de A.
Dans une équation A = B :
on peut composer ("multiplier") par une relation X à droite de chacun des termes de l'équation, si et seulement si la hauteur de X est égale à la largeur de A et de B.
(A = B => A o X = B o X) <=> hauteur de X = largeur de A et de B

on peut composer ("multiplier") par une relation X à gauche de chacun des termes de l'équation, si et seulement si la largeur de X est égale à la hauteur de A et de B.
(A = B => X o A = X o B) <=> largeur de X = hauteur de A et de B

b) Tissu, représentation Carton - Rentrage - Diagramme de tissu.

L'ensemble des diagrammes d'un tissu représenté sous la forme Carton - Rentrage - Diagramme de tissu, peut être considéré comme une composition de relation :

Considérons le tissu formé d'un rentrage, d'un carton et d'un diagramme de tissu, résultat du "calcul du tissu". Les deux diagrammes de rentrage et de carton peuvent être représentés par les relations R et C ; la seule particularité étant que R sera toujours une application. En effet chaque fil d'un rentrage est enfilé dans un cadre et un seul.
Une case du tissu sera cochée si le fil de chaîne correspondant est levé à cette duite. Autrement dit, si on peut trouver un cadre, dans lequel est enfilé le fil, qui est levé à cette duite. Le fil est en relation avec le cadre qui lui.-même est en relation avec la duite. Le diagramme de tissu T est exactement la relation C o R .

Regardons cela plus en détail :

Une case noire d'un diagramme signifie que l'abscisse est en relation avec l'ordonnée.
A est le rentrage : E est l'ensemble des fils ———> F est l'ensemble des cadres
x A y : le fil x est enfilé dans le cadre y

B est le carton : F est l'ensemble des cadres ———> G est l'ensemble des duites
y B z : le cadre y est levé à la duite z

B o A est le diagramme de tissu : E est l'ensemble des fils ———> G est l'ensemble des duites
x BoA z : le fil x est levé à la duite x.

$$\underset{\substack{\text{Fils}\\ x}}{E} \xrightarrow{\substack{A\\ \text{Rentrage}}} \underset{\substack{\text{Cadres}\\ y}}{F} \xrightarrow{\substack{B\\ \text{Carton}}} \underset{\substack{\text{Duites}\\ z}}{G}$$

$$\underset{\substack{\text{Fils}\\ x}}{E} \xrightarrow{\substack{B \text{ o } A\\ \text{Diagramme de tissu}}} \underset{\substack{\text{Duites}\\ z}}{G}$$

Traduisons la définition de la composition des relations en langage de tissage :

$$\forall\ (x, z) \in E x G \qquad x\ BoA\ z \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\ y \in F \quad x\ A\ y \ \text{ et } \ y\ B\ z$$

Pour tout x dans E et pour tout z dans G, x est en relation avec z par la relation BoA,
est équivalent à,
il existe un élément y de F tel que
x est en relation avec y par la relation A, et, y est en relation avec z par la relation B.

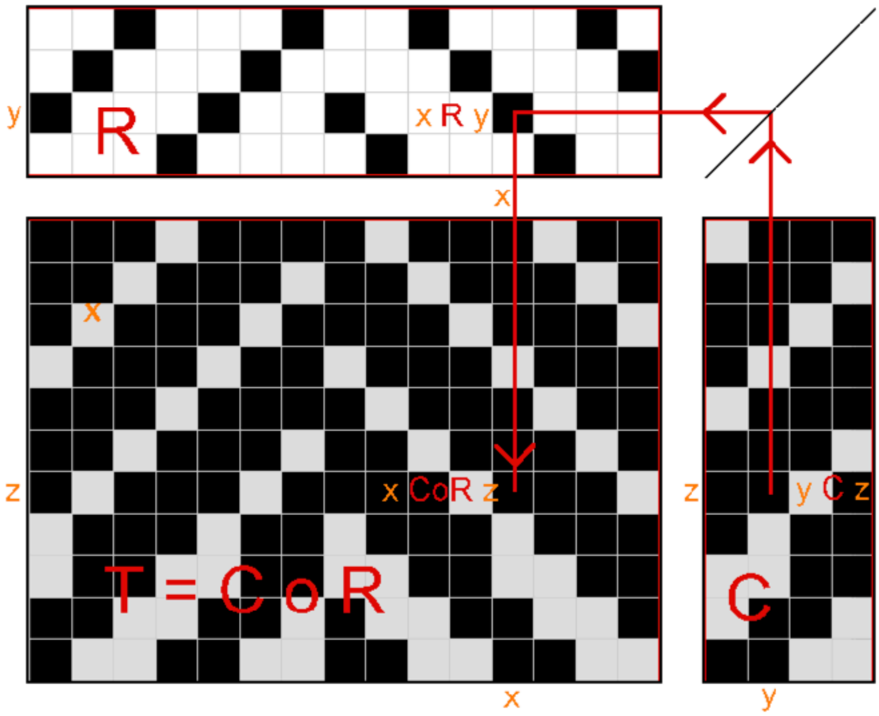
Pour tout fil x et pour toute duite z dans le diagramme de tissu BoA, le fil x est levé à la duite x,
est équivalent à,
il existe un cadre y tel que
le fil x est enfilé dans le cadre y dans le rentrage, et,
le cadre y est levé à la duite z dans le carton.

On représentera donc le calcul du diagramme de tissu T, de rentrage R et de carton C, par la composition de la relation R suivie de la relation C :

$$T = C \circ R$$

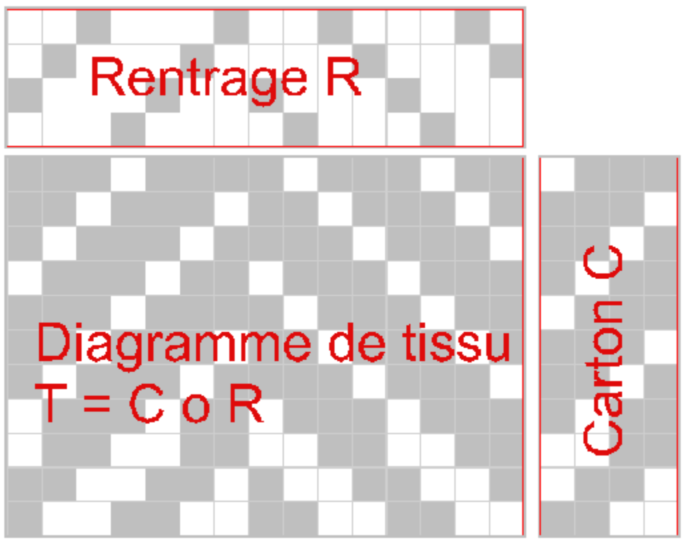
On appellera $T = C \circ R$ le "calcul du tissu", ou la "formule du tissu"

$x\, R\, y$ et $y\, C\, z \iff x\ C \circ R\ z$



Le diagramme de tissu T est la composition du rentrage R suivie du carton C

$$T = C \circ R$$

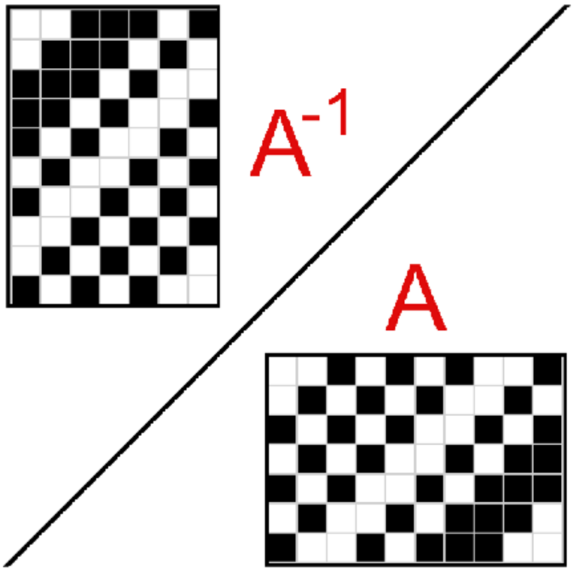


La représentation Carton-Rentrage-Diagramme de tissu

Dans la représentation "Carton - Rentrage - Diagramme de tissu",
chaque pédale du carton est reliée au cadre du rentrage de même numéro.
Les colonnes du carton correspondent aux lignes du rentrage ; la hauteur du rentrage est toujours égale à la largeur du carton.

5- RELATION RéCIPROQUE

Etant donnée une relation A de E vers F, on appelle relation réciproque de A, et on note A^{-1}, la relation de F vers E telle que :



$$A^{-1} = (y, x) \in FXE \;/\; x\,A\,y$$

$$\forall (y, x) \in FXE \qquad y\,A^{-1}\,x \iff x\,A\,y$$

$$E \xrightarrow{\quad A \quad} F$$
$$x \qquad\qquad y$$

$$E \xleftarrow{\quad A^{-1} \quad} F$$
$$x \qquad\qquad y$$

Le diagramme de la relation réciproque A^{-1} est, le symétrique de celui de A, par rapport à la première bissectrice.
On passe de A à A^{-1} en échangeant les lignes et les colonnes.
La largeur de A^{-1} est égale à la hauteur de A.
La hauteur de A^{-1} est égale à la largeur de A.

Remarque : il ne faut pas confondre la réciproque d'une relation et l'application réciproque d'une bijection. Une relation n'est pas en général une application et une application ne possède une application réciproque que si elle est bijective. Toutefois dans le cas d'une relation bijective les deux notions coïncident ; on peut considérer la notion de relation réciproque comme une extension de la notion de réciproque d'une bijection.

Il est clair que la réciproque de la réciproque de A est égale à A :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Nous avons déjà remarqué que les notions d'application et d'injection étaient "symétriques", l'une s'appliquant aux colonnes et l'autre aux lignes. Exprimons plus rigoureusement ce résultat en montrant que si A est injective alors A^{-1} est une application et réciproquement.

A est une application de E vers F
$\forall x \in E \quad \exists!\, y \in F \quad x\,A\,y$
$\forall x \in E \quad (\exists y \in F \quad x\,A\,y \quad \text{et} \quad \forall (y', y'') \in F^2 \quad x\,A\,y' \text{ et } x\,A\,y'' \Rightarrow y' = y'')$
$\forall x \in E \quad (\forall (y', y'') \in F^2 \quad x\,A\,y' \text{ et } x\,A\,y'' \Rightarrow y' = y''$
Car A est partout définie ($\forall x \in E \quad \exists y \in F \; x\,A\,y$)
$\forall x \in E \quad (\forall (y', y'') \in F^2 \quad y'\,A^{-1}\,x \text{ et } y''\,A^{-1}\,x \Rightarrow y' = y''$
A^{-1} est une injection de F vers E

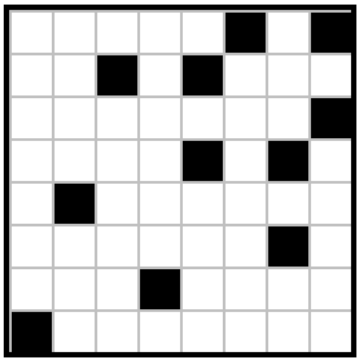
En appliquant ce résultat à A^{-1} on peut énoncer :

A est une application $\iff$ A^{-1} est une injection
A est une injection $\iff$ A^{-1} est une application

6- RELATION SYMéTRIQUE

Nous dirons d'une relation A qu'elle est symétrique si elle est égale à sa réciproque : $A = A^{-1}$

$\forall$ (x, y) $\in$ E x E   x A y => y A x



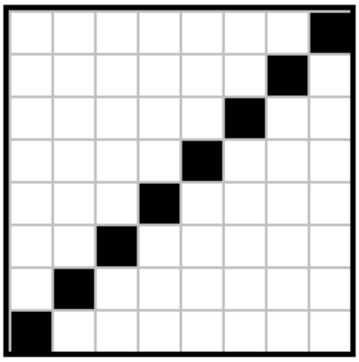
Une relation symétrique A est carrée.

En effet la hauteur de A est égale à la hauteur de A^{-1}, qui est égale à la largeur de A.
Le diagramme d'une relation symétrique est symétrique par rapport à la première bissectrice.

7- PREMIèRE DIAGONALE I. DIAGRAMME SUIVI.

Pour chaque ensemble [1,n] il existe une relation particulière, l'application identique de [1,n] dans [1,n] que l'on notera I_n, définie par :

I_n = ((x, y) $\in$ $[1,n]^2$ / x = y)
$\forall$ (x, y) $\in$ $[1,n]^2$ x I_n y <=> x = y



I_8

I_n , est bijective, carrée et de côté n. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible on la notera simplement I.
Le diagramme de I_n est la première diagonale du carré de côté n. En tissage on parlera de diagramme suivi de dimensions n.

I est symétrique : $I = I^{-1}$

Etant donnée une relation A de E vers F et I l'application identique de F (A et I ont même hauteur) on a :

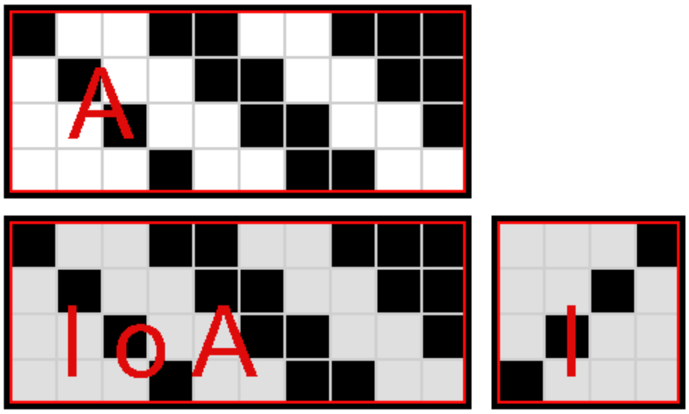
$$I \circ A = A$$

soit x de E et y de F

$x \ IoA \ y \iff \exists z \in F \quad x \ A \ z \ \text{ et } \ z \ I \ y$

$x \ IoA \ y \iff \exists z \in F \quad x \ A \ z \ \text{ et } \ z = y$

$x \ IoA \ y \iff x \ A \ y$



I o A = A

Etant donnée une relation B de E vers F et I l'application identique de E (B et I ont même largeur) on a :

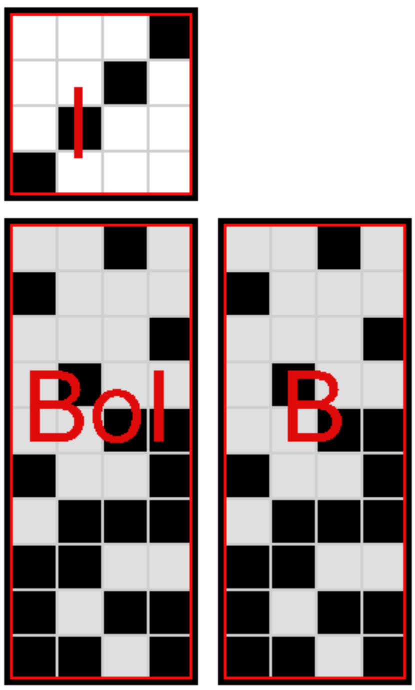
$$B \circ I = B$$

soit x de E et y de F

$x \ BoI \ y \iff \exists z \in E \quad x \ I \ z \ \text{ et } \ z \ B \ y$

$x \ BoI \ y \iff \exists z \in E \quad x = z \ \text{ et } \ z \ B \ y$

$x \ BoI \ y \iff x \ B \ y$



B o I = B

On retrouve ici les résultats concernant le tissage :

Une marchure suivie reproduit le rentrage au tissu.

Un rentrage suivi reproduit la marchure au tissu.

Bien qu'il faille toujours prendre garde à la taille de la diagonale et au sens de la composition des relations, pour le calcul, nous retiendrons que l'on peut simplifier par I à droite et à gauche.

$$I \circ A = A \qquad\qquad B \circ I = B$$

8- RéCIPROQUE DE LA COMPOSéE DE DEUX RELATIONS

Etant données une relation A, de E vers F, une relation B de F vers G et la composée B o A.

$$E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$$

$$E \xrightarrow{B \circ A} G$$

considérons la réciproque $(B \circ A)^{-1}$ de la composée B o A

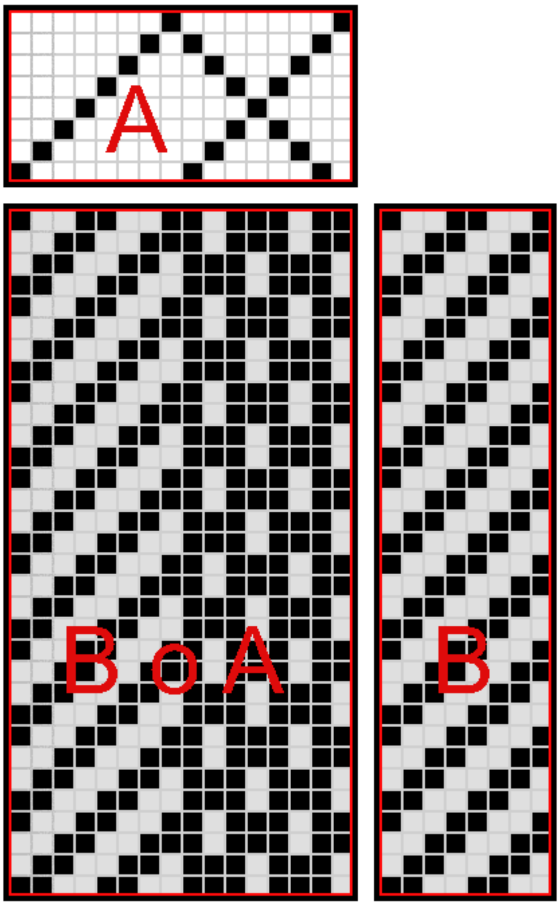
$$G \xrightarrow{(B \circ A)^{-1}} E$$

soient z un élément de G et x un élément de E

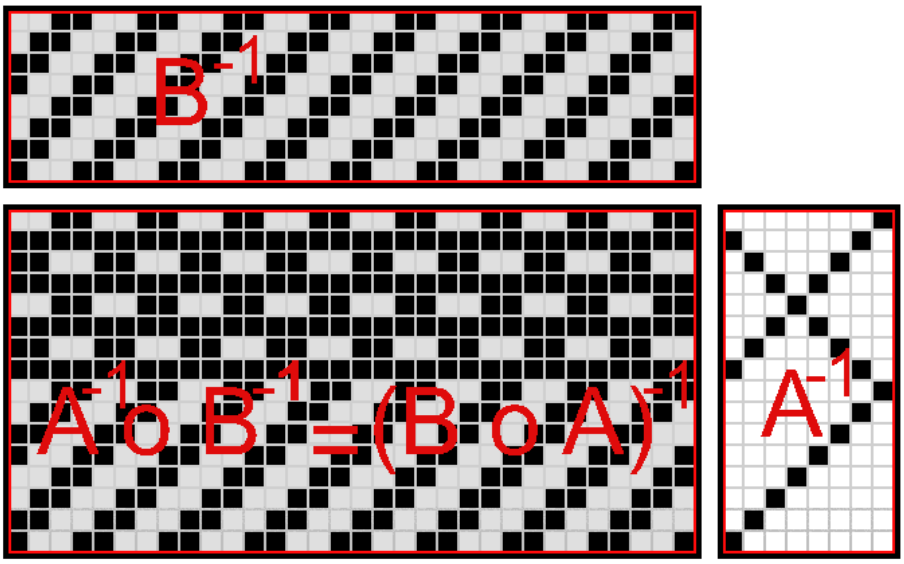
$z\ (B \circ A)^{-1}\ x$	$\Leftrightarrow$	$x\ BoA\ z$				définition de $(B \circ A)^{-1}$
$z\ (B \circ A)^{-1}\ x$	$\Leftrightarrow$	$\exists\ y \in F$	$x\ A\ y$	et	$y\ B\ z$	
$z\ (B \circ A)^{-1}\ x$	$\Leftrightarrow$	$\exists\ y \in F$	$y\ A^{-1}\ x$	et	$z\ B^{-1}\ y$	définitions de A^{-1} et de B^{-1}
$z\ (B \circ A)^{-1}\ x$	$\Leftrightarrow$	$z\ \ A^{-1} o B^{-1}\ \ x$				

on a donc

$$(B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1}$$



B o A



$A^{-1} \circ B^{-1} = (B \circ A)^{-1}$

La réciproque de la composée est donc égale à la composée, dans le sens contraire, des réciproques.
Ce résultat se généralise facilement à la composition de plusieurs relations :

$$(C \circ B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1} \circ C^{-1}$$

$(C \circ B \circ A)^{-1} = ((C \circ B) \circ A)^{-1}$
$(C \circ B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ (C \circ B)^{-1}$
$(C \circ B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ (B^{-1} \circ C^{-1})$
$(C \circ B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1} \circ C^{-1}$

9- COMPOSéE D'UNE RELATION AVEC SA RéCIPROQUE

a) Propriétés

Soit A une relation de E dans F et A^{-1} de F dans E sa réciproque.

La composée A^{-1} o A et la composée A o A^{-1} existent toujours, car la largeur de A^{-1} est égale à la hauteur de A, et la largeur de A est égale à la hauteur de A^{-1}.

Montrons que A^{-1} o A est symétrique :

$(A^{-1} \text{ o } A)^{-1} = A^{-1} \text{ o } (A^{-1})^{-1}$

$(A^{-1} \text{ o } A)^{-1} = A^{-1} \text{ o } A$

A^{-1} o A étant égale à sa réciproque, est donc symétrique.

Montrons de plus que A^{-1} o A contient la diagonale de E :

A est partout définie donc :

$\forall\, x \in E \quad \exists\, y \in F \quad x\, A\, y$

$x\, A\, y \iff y\, A^{-1}\, x$

on a donc

$\forall\, x \in E \quad \exists\, y \in F \quad x\, A\, y \text{ et } y\, A^{-1}\, x$

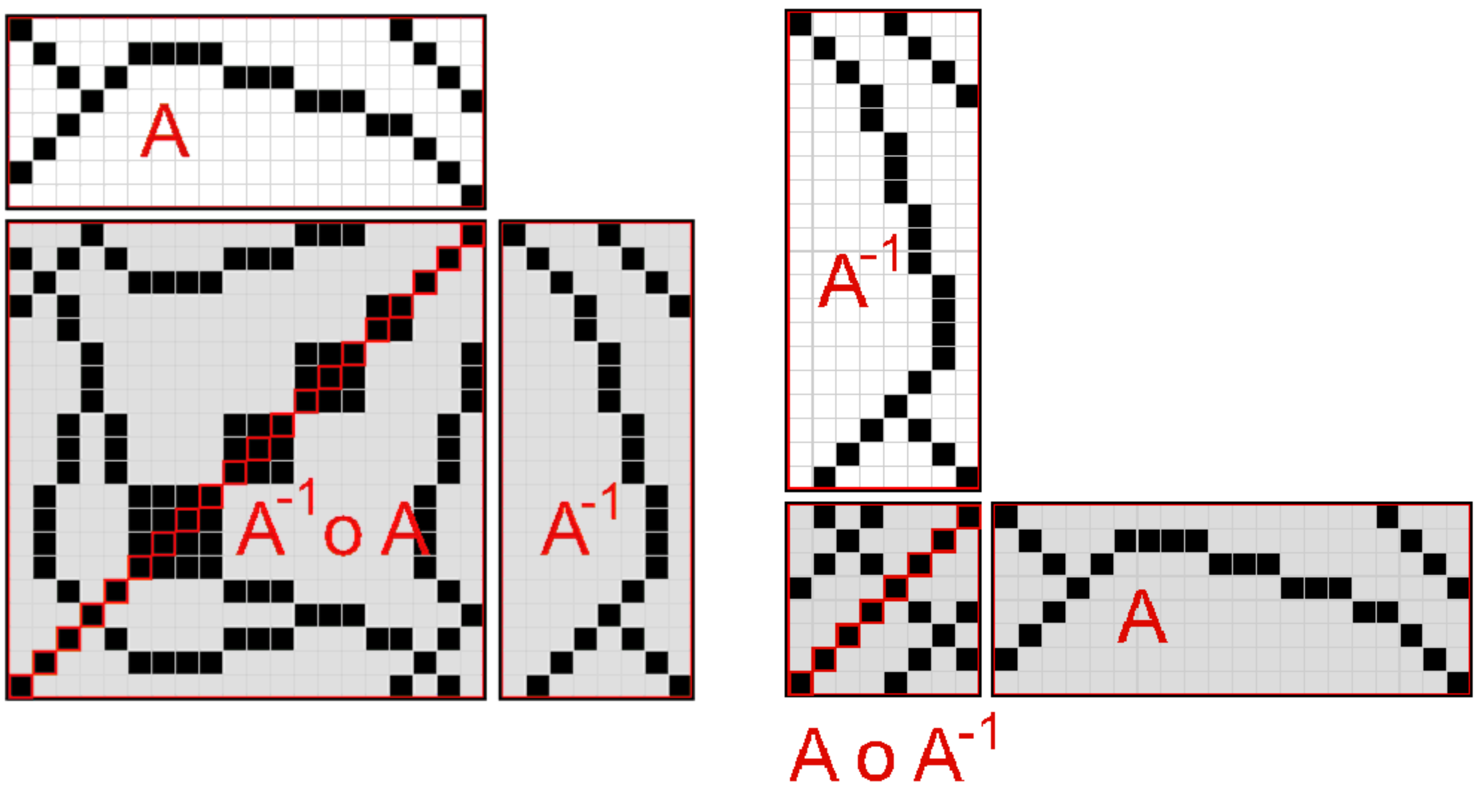
Soit $\forall\, x \in E \quad x\ (A^{-1}oA)\ x$

tous les points (x, x) de la diagonale I de E appartiennent donc à $A^{-1}oA$

Ces résultats s'appliquent à toute relation et en particulier à A^{-1}

$(A^{-1})^{-1}$ o (A^{-1}) , c.-à-d. A o A^{-1} est donc également symétrique.

De plus A o A^{-1} contient la diagonale de F.

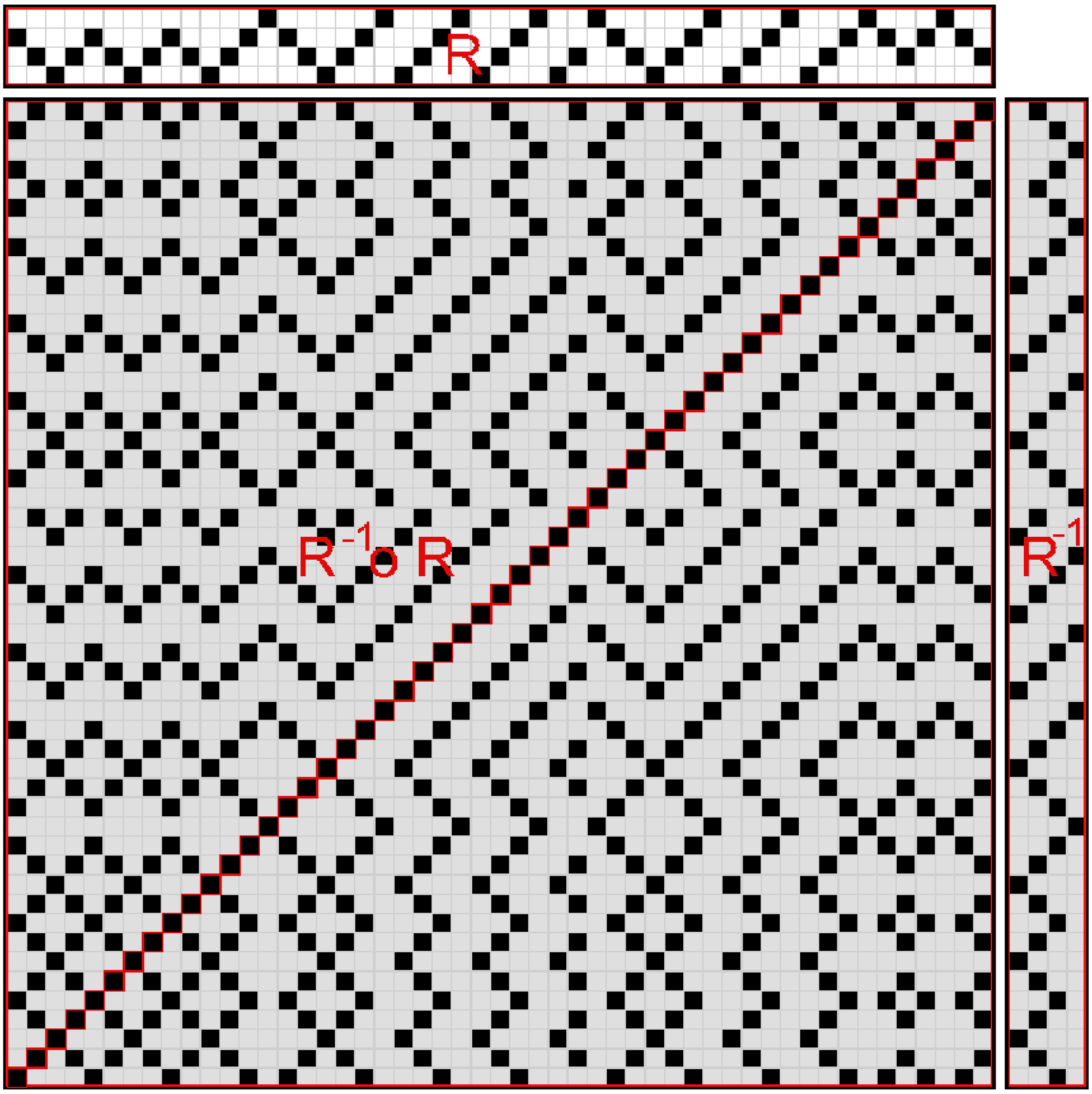


$A^{-1}oA$ et AoA^{-1} sont symétriques et contiennent leur diagonale I (en rouge)

La composée d'une relation A suivie de sa réciproque est symétrique et contient I

b) "Marché comme enfilé"
Anticipons le chapitre 6. Cette situation correspond au cas où, en tissage, le rentrage est repris comme marchure ; on dit encore que l'on "marche comme enfilé". En fait on prend pour marchure R^{-1} , la réciproque du rentrage R. Le tissu T est de la forme : $T = R^{-1} \circ R$

Nous savons dès maintenant qu'un tel tissu contiendra la première bissectrice et sera symétrique par rapport à elle. Cette courbe symétrique organisée autour de la première diagonale a une grande importance du point de vue graphique ; Brandon-Guiguet l'appelle "axiale de remettage".



$R^{-1} \circ R$

Lorsque le rentrage est repris comme marchure (lorsque l'on marche comme enfilé), la ligne graphique du tissu contient la première diagonale (en rouge) et est symétrique par rapport à elle.

Notez que l'expression "le rentrage est repris comme marchure" sous-entend : symétriquement par rapport à la première bissectrice ; la marchure n'est pas égale au rentrage mais à sa réciproque. Les aptitudes d'un rentrage particulier à produire un graphisme symétrique par rapport à la diagonale sont ici mises en évidence ; nous verrons plus loin que ce n'est pas le seul cas à envisager. La symétrie concerne ici la ligne graphique seule du tissu ; l'attachage est suivi et la marchure n'est pas non plus armurée car c'est la symétrique d'un rentrage. Nous verrons également plus loin à quelle condition cette propriété est conservée lorsque l'on armure l'attachage.

c) Règles de simplification. Relations inversibles.

Nous avons vu que $A^{-1} o A$ contenait la diagonale I, c.-à-d. que I était incluse dans $A^{-1} o A$.

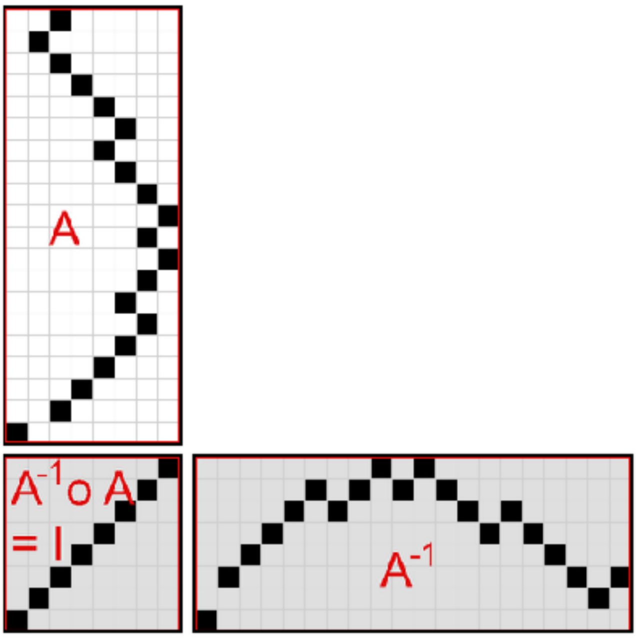
Cherchons maintenant à quelle condition $A^{-1} o A$ est égal à I.

Supposons que $A^{-1} o A = I$; montrons qu'alors A est injective.
Soit x' et x" des éléments de E en relation avec un élément y de F :

x' A y et x" A y => x' A y et y A^{-1} x"
x' A y et x" A y => x' $A^{-1}oA$ x"
x' A y et x" A y => x' I x"
x' A y et x" A y => x' = x"
A est donc injective

Réciproquement montrons que si A est injective, alors $A^{-1} o A = I$.
Soit un élément x de E en relation par $A^{-1}oA$ avec un élément z de E

x $A^{-1}oA$ z <=> ∃ y ∈ F x A y et y A^{-1} z
x $A^{-1}oA$ z <=> ∃ y ∈ F x A y et z A y
x $A^{-1}oA$ z => x = z car A est injective
x $A^{-1}oA$ z => x I z
$A^{-1} o A$ contenant I on a donc $A^{-1} o A= I$



$A^{-1} o A = I$ <=> A est injective

On peut donc, lorsque A est injective, simplifier par A à gauche :

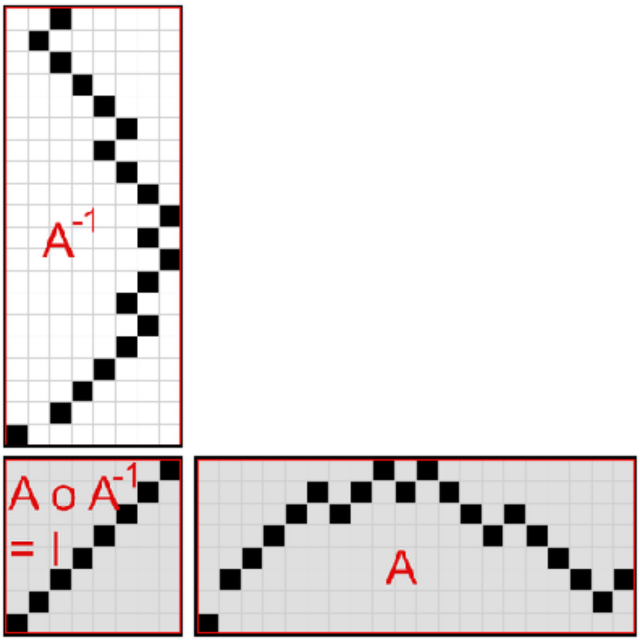
A o X = A o Y => $A^{-1} o A o X = A^{-1} o A o Y$
A o X = A o Y => I o X = I o Y
A o X = A o Y => X = Y

Lorsque A est injective, on peut simplifier par A à gauche
A o X = A o Y et A est Injective => X = Y

En appliquant ce résultat à A^{-1} nous pouvons écrire :

$(A^{-1})^{-1}$ o A^{-1} = I <=> A^{-1} est injective

A^{-1} injective <=> A est une application



A o A^{-1} = I <=> A est une application

On peut donc, lorsque A est une application, simplifier par A à droite :

X o A = Y o A => X o A o A^{-1} = Y o A o A^{-1}

X o A = Y o A => X o I = Y o I

X o A = Y o A => X = Y

Lorsque A est une application, on peut simplifier par A à droite

X o A = Y o A et A est une application => X = Y

Dans le cas d'une relation carrée, nous pouvons déduire des deux résultats précédents :

A^{-1} o A = A o A^{-1} = I <=> A est une bijection

D'autre part on peut, lorsque A est bijective, simplifier par A à droite et à gauche :

Lorsque A est une bijection, on peut simplifier par A à droite et à gauche

(X o A = Y o A ou A o X = A o Y) et A est une bijection => X = Y

Résumons les résultats précédents :

A^{-1} o A = I <=> A est injective

On peut simplifier par A à gauche

A o A^{-1} = I <=> A est une application

On peut simplifier par A à droite

A^{-1} o A = A o A^{-1} = I <=> A est une bijection

On peut simplifier par A à droite et à gauche

Si deux relations A et B sont injectives, et que la composée B o A existe, alors B o A est injective.

Soit deux relations A et B injectives dont la composée B o A existe.

$A^{-1} \circ A = I \iff$ A est injective (I est l'identité de la hauteur de A)

$B^{-1} \circ B = I \iff$ B est injective (I est l'identité de la hauteur de B)

Calculons $(B \circ A)^{-1} \circ (B \circ A)$

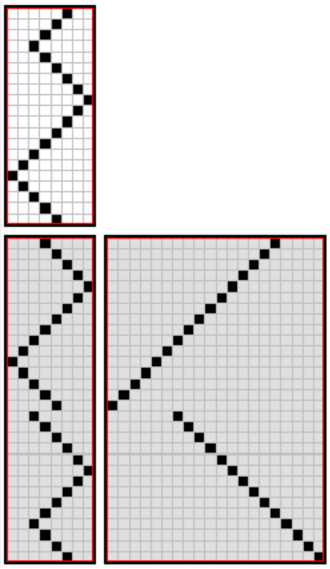
$(B \circ A)^{-1} \circ (B \circ A) = A^{-1} \circ B^{-1} \circ B \circ A$

$(B \circ A)^{-1} \circ (B \circ A) = A^{-1} \circ I \circ A$

$(B \circ A)^{-1} \circ (B \circ A) = A^{-1} \circ A$

$(B \circ A)^{-1} \circ (B \circ A) = I$

Donc B o A est injective



A et B injectives => B o A est injective.

De la même manière

Si deux relations A et B sont des applications, et que la composée B o A existe, alors B o A est une application.

Soit deux applications A et B dont la composée B o A existe.

Alors $(B \circ A)^{-1}$ existe ; $A^{-1} \circ B^{-1}$ existe.

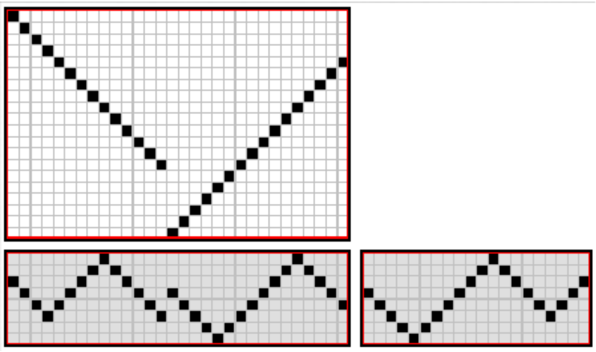
A et B sont des applications, alors A^{-1} et B^{-1} sont injectives.

Donc $A^{-1} \circ B^{-1}$ est injective.

Donc $(A^{-1} \circ B^{-1})^{-1}$ est une application.

Donc $(B^{-1})^{-1} \circ (A^{-1})^{-1}$ est une application.

Donc B o A est une application.



A et B sont des applications => B o A est une application.

On dira qu'une relation A est inversible si elle possède un inverse B ; c'est-à-dire s'il existe une relation B telle que $A \circ B = B \circ A = I$

Remarque : si l'on considère l'ensemble des relations carrées de côté n, on peut dire que, si A est une bijection, alors A est inversible et que son inverse est égale à sa réciproque A. Ceci justifie en partie la notation de la réciproque de A par A^{-1}. Justifions complètement cette notation en montrant que toutes les relations inversibles sont des bijections et que leurs inverses sont égales à leur réciproque.

Soit une relation A inversible et B son inverse :

$A \circ B = B \circ A = I$

A et B doivent donc être carrées ; ce sont des relations de E vers E.

On a par définition de I :

$\forall x \in E \quad x \, I \, x$

et donc sachant que $B \circ A = I$:

$\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x \, A \, y \quad \text{et} \quad y \, B \, x$

On peut donc affirmer que A est partout définie et que B est surjective. En raisonnant avec A o B on montre que A est surjective et que B est partout définie.

Montrons que A est injective :

Soit y un élément de E, x' et x'' des éléments de E tels que x' A y et x'' A y
B est partout définie donc il existe un élément z de E tel que : y B z

$x' \, A \, y \quad \text{et} \quad y \, B \, z \quad \Rightarrow \quad x' \, B{\circ}A \, z$

$x' \, A \, y \quad \text{et} \quad y \, B \, z \quad \Rightarrow \quad x' \, I \, z$

$x' \, A \, y \quad \text{et} \quad y \, B \, z \quad \Rightarrow \quad x' = z$

de même

$x'' \, A \, y \quad \text{et} \quad y \, B \, z \quad \Rightarrow \quad x'' = z$

$x'' \, A \, y \quad \text{et} \quad y \, B \, z \quad \Rightarrow \quad x'' = x$

A est donc injective

A est carrée et injective, donc bijective. D'après ce qui précède son inverse B est donc égal à A^{-1}.

La notion de réciproque d'une relation coïncide donc avec la notion d'inverse, pour les bijections. La notation de la réciproque d'une relation A par A^{-1} est donc acceptable, de plus elle prolonge la notion d'application réciproque, traditionnellement notée f^{-1}.

10- RELATION INVOLUTIVE

On dira qu'une relation est involutive si elle est à la fois symétrique et bijective.

On a alors : $A = A^{-1}$ et $A^{-1} \circ A = A \circ A^{-1} = I$
soit $A^2 = I$

Réciproquement considérons une relation A telle que $A^2 = I$:

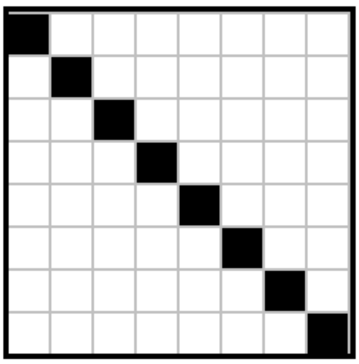
si on écrit : $A \circ A = A \circ A = I$
il résulte de ce qui précède que A est inversible et bijective. De plus son inverse A est égal à A^{-1}, ce qui signifie que A est symétrique.

A est involutive <=> $A = A^{-1}$ et $A^{-1} \circ A = A \circ A^{-1} = I$
A est involutive <=> A est symétrique et bijective
A est involutive <=> $A^2 = I$

11- DEUXIèME DIAGONALE -I . DIAGRAMME à RETOUR.

Pour chaque ensemble $E = [\,1, n\,]$: il existe une relation particulière, que l'on notera $-I_n$, qui à chaque x de E fait correspondre son opposé modulo n+1, soit n+1 - x. Nous noterons cette relation -I lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

$$\forall (x, y) \in [\,1, n\,]^2 \quad x \; -I_n \; y \quad \Leftrightarrow \quad x + y = n + 1$$



$-I_8$

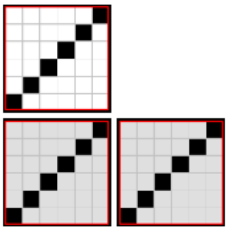
Le diagramme de $-I_n$ est la deuxième diagonale du carré de côté n. En tissage on parlera de diagramme à retour.

$-I_n$ est bijective, symétrique et donc involutive.

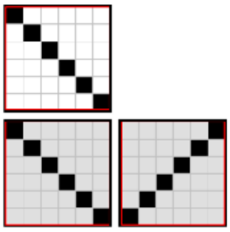
$(-I)^{-1} = -I$ et $(-I)^{-2} = I$

12- CALCUL SUR LES DIAGRAMMES SUIVIS ET à RETOUR

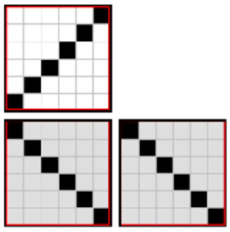
Nous retrouvons ici les règles de calculs sur les diagrammes suivis à retour :



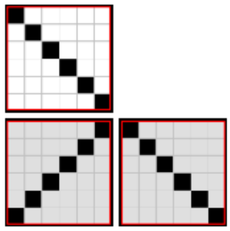
I o I = I
\+ x + = +



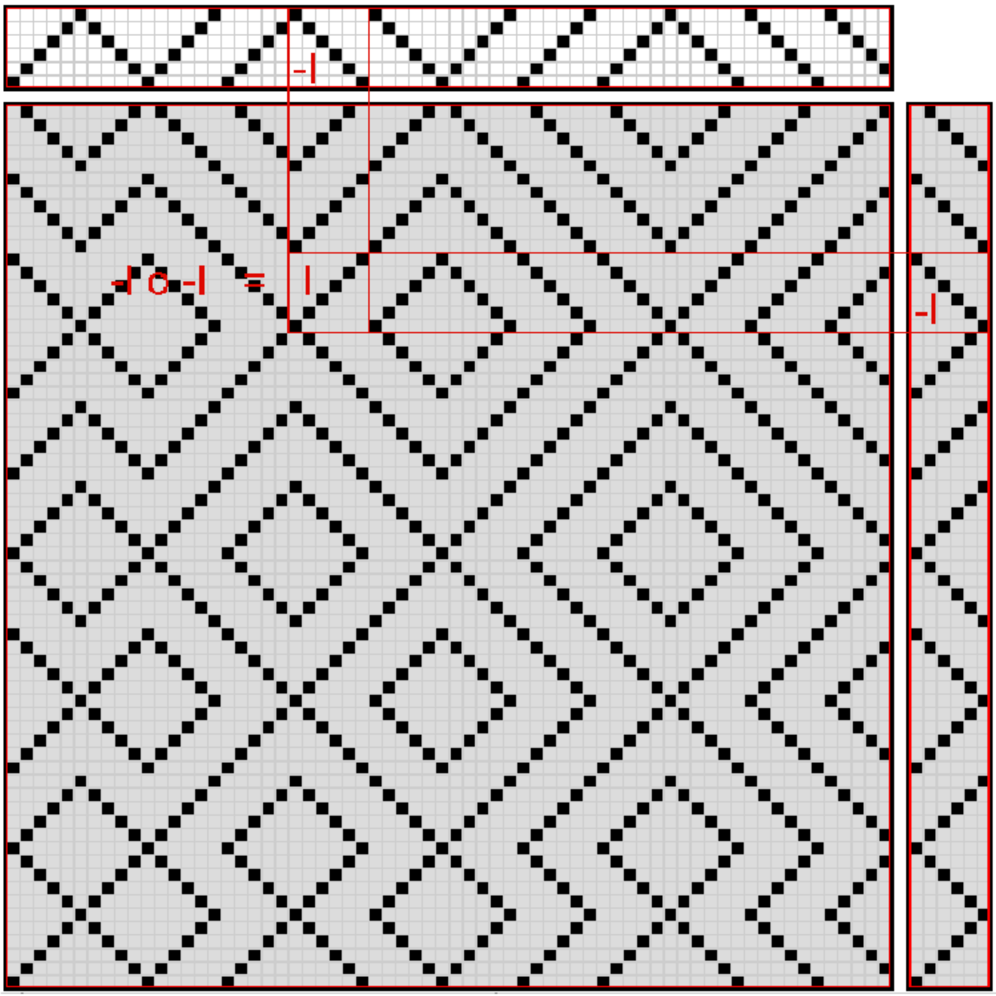
I o -I = -I
\+ x - = -



-I o I = -I
\- x + = -



-I o -I = I
\- x - = +

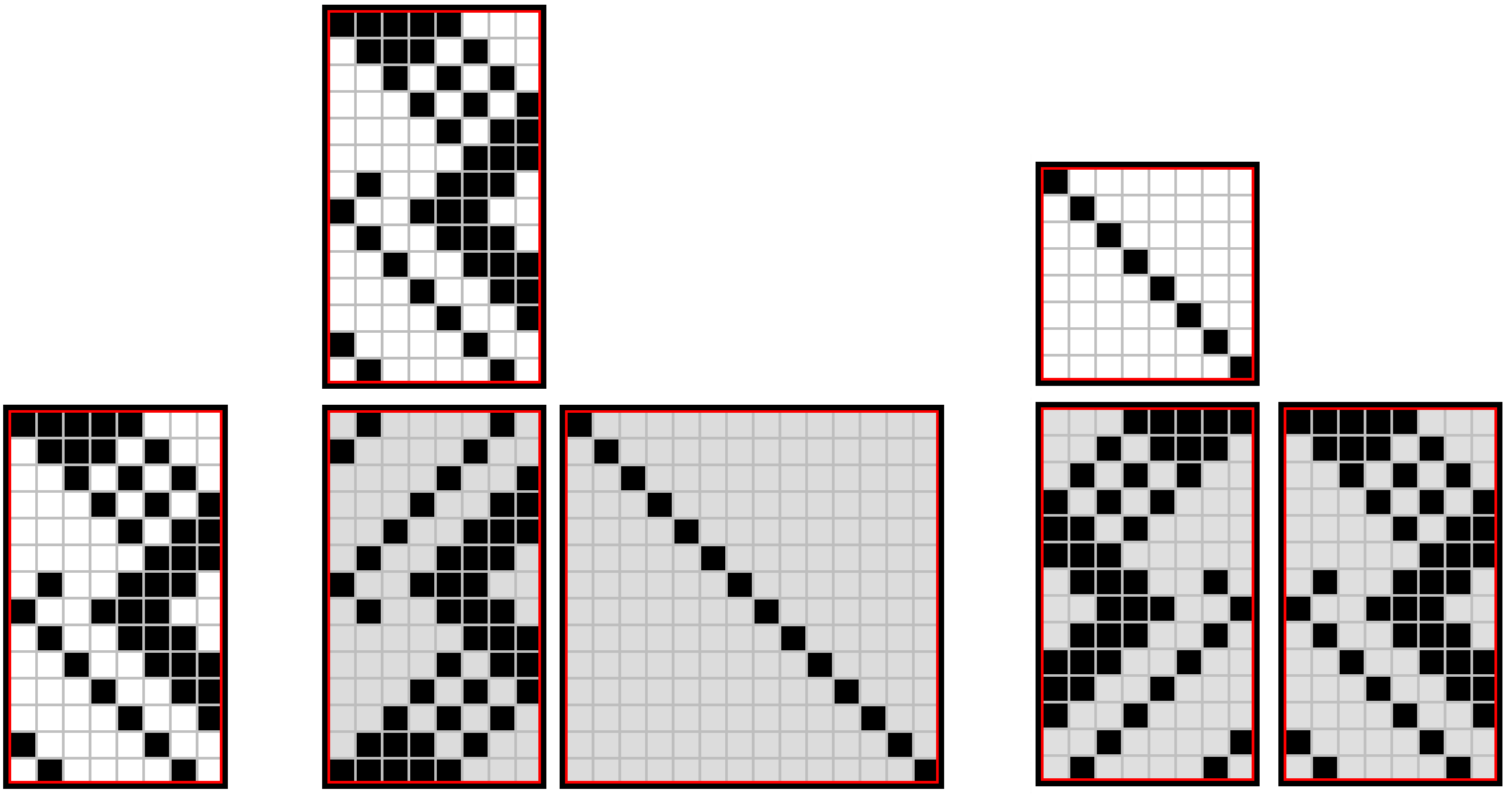


-I o -I = I   - x - = +

Un moyen mnémotechnique simple consiste à penser à la règle des signes : moins par moins égal plus, etc., le + représentant la première diagonale I (montant vers la droite) et le - représentant la deuxième diagonale (montant vers la gauche). Dans un tissu à pointe et à retour, en isolant un rapport, suivi ou à retour, du rentrage et un autre dans la marchure on se trouve confronté au calcul de l'un des tissus élémentaires ci-dessus. Ces règles en tête on peut très rapidement établir un schéma complet du tissu (du type de ceux de Rondo Amigo).
Cette technique peut bien sûr s'étendre au rentrage et à la marchure par corps à pointe et à retour. Toutefois si ici I commute avec -I, comme avec toutes les relations, il n'en est pas de même pour -I comme nous le verrons dans ce qui suit. L'analogie avec les signes est donc à restreindre à ce cas bien précis.

a) Expression d'une transformation géométrique

Composer une relation A avec -I peut être considéré comme lui faire subir une transformation géométrique simple :



A

-I o A

Le diagramme -I o A est le symétrique par rapport à l'horizontale du diagramme de A.

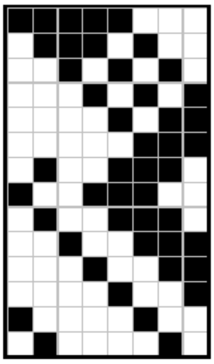
A o -I

Le diagramme A o -I est le symétrique par rapport à la verticale du diagramme de A.

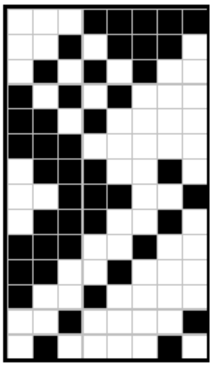
Notez que la relation -I dans l'expression -I o A n'est pas la même que la relation -I dans l'expression A o -I.
Dans l'expression -I o A , -I a la même largeur que la hauteur de A.
Dans l'expression A o -I , -I a la même hauteur que la largeur de A.

b) Expression d'une transformation géométrique quelconque
En tissage les dessins complexes sont le plus souvent construits à l'aide d'un motif élémentaire tourné ou renversé un certain nombre de fois ; autrement dit on fait subir au motif de base une transformation géométrique simple. Précisons ce point : le motif n'est pas déformé, la transformation géométrique est telle que le motif transformé est "superposable" au motif de départ. Les dessins sont effectués sur du papier quadrille. Quand on parle de tourner un motif, il s'agit de le tourner d'un ou de plusieurs "quarts de tour", dans un sens ou dans l'autre. Quand on parle de renverser un motif, c'est, sous entendu, verticalement ou horizontalement.

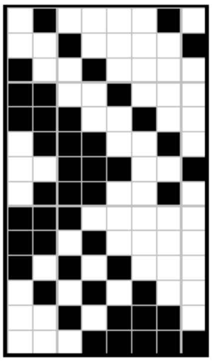
Ces transformations géométriques simples, ou positions d'un diagramme, sont au nombre de huit. Elles peuvent être toutes déduites de composition d'une symétrie et d'une rotation. Elles peuvent être également toutes déduites de la composition de la symétrie par rapport à la première diagonale, (transformation qui fait passer d'une relation A à sa réciproque), et d'une symétrie.



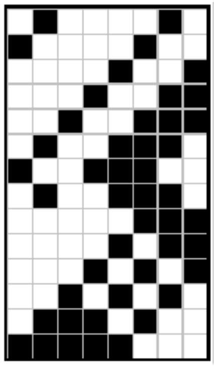
A



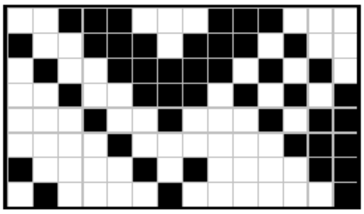
A o -I
sym/vert



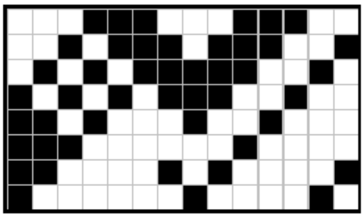
-I o A o -I
rot 180°



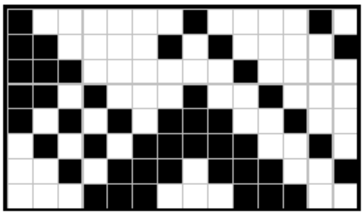
-I o A
sym/hori



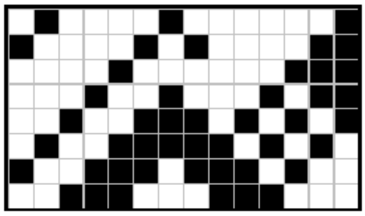
A^{-1}
sym/1ère diag



A^{-1} o -I
rot +90°



-I o A^{-1} o -I
sym/2ème diag



-I o A^{-1}
rot -90°

+ pour une rotation signifie : dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

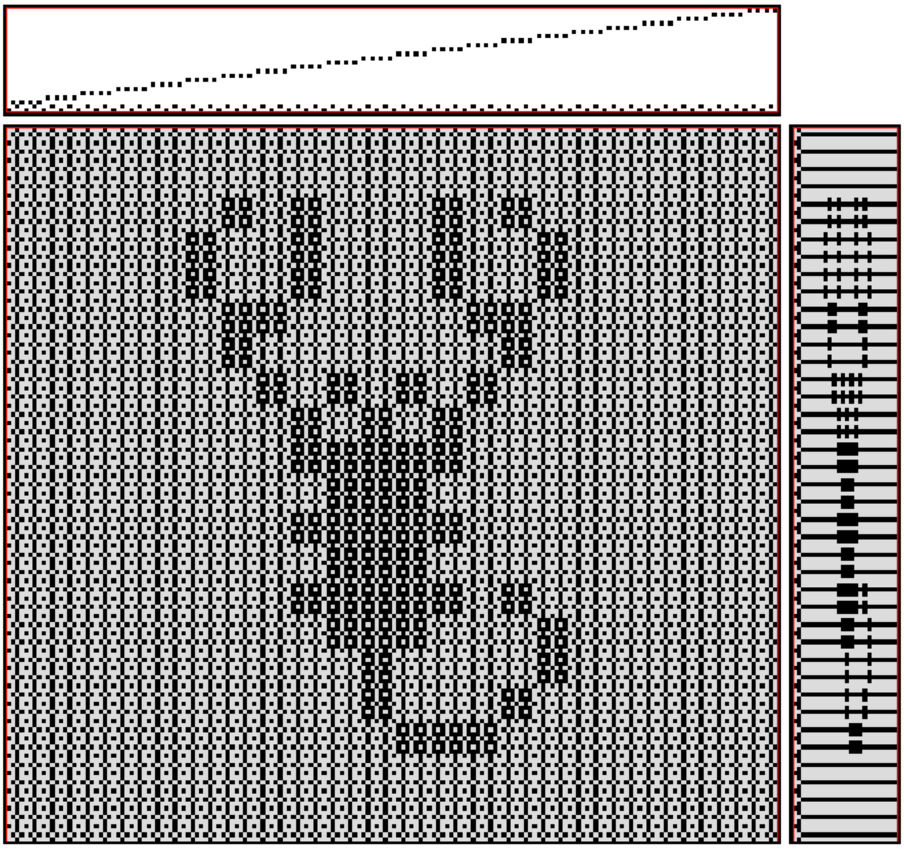
Bien qu'il soit légitime de décrire l'interaction de toutes ces transformations géométriques et de la composition des relations (et donc du diagramme de tissu), en n'en privilégiant aucune, nous nous limiterons aux vues jusqu'à présent. En effet les résultats portant sur toutes les transformations sont trop nombreux pour être tous retenus, de plus il faudrait introduire une nouvelle notation plus homogène de ces transformations.

Une transformation particulière sera donc déduite simplement des trois précédentes. Notons à titre d'exemple :

Le diagramme A^{-1} o -I = (-I o A)$^{-1}$ est égal au diagramme de A tourné de + 90°.
Le diagramme -I o A^{-1} = (A o -I)$^{-1}$ est égal au diagramme de A tourné de - 90°.
Le diagramme -I o A o -I = (-I o A^{-1} o -I)$^{-1}$ est égal au diagramme de A tourné de 180°.

c) Conséquences d'une symétrie sur le rentrage ou sur le carton
(représentation carton-rentrage-diagramme de tissu).

Considérons un tissu de type carton - rentrage
$T_1 = C_1 \circ R_1$



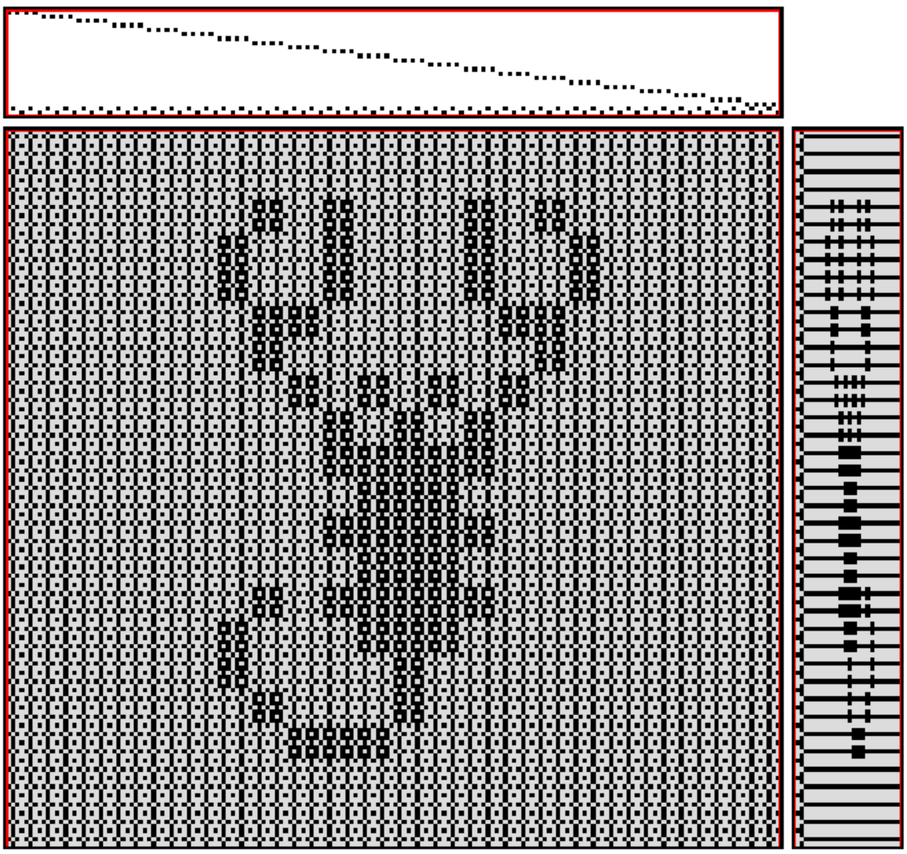
$T_1 = C_1 \circ R_1$

Si l'on remplace le rentrage R_1 par son symétrique par rapport à la verticale $R_2 = R_1 \circ -I$, le nouveau tissu
$T_2 = C_1 \circ R_2$ sera le symétrique de T_1 par rapport à la verticale.

$R_2 = R_1 \circ -I$
R_2 est le symétrique de R_1 par rapport à la verticale.

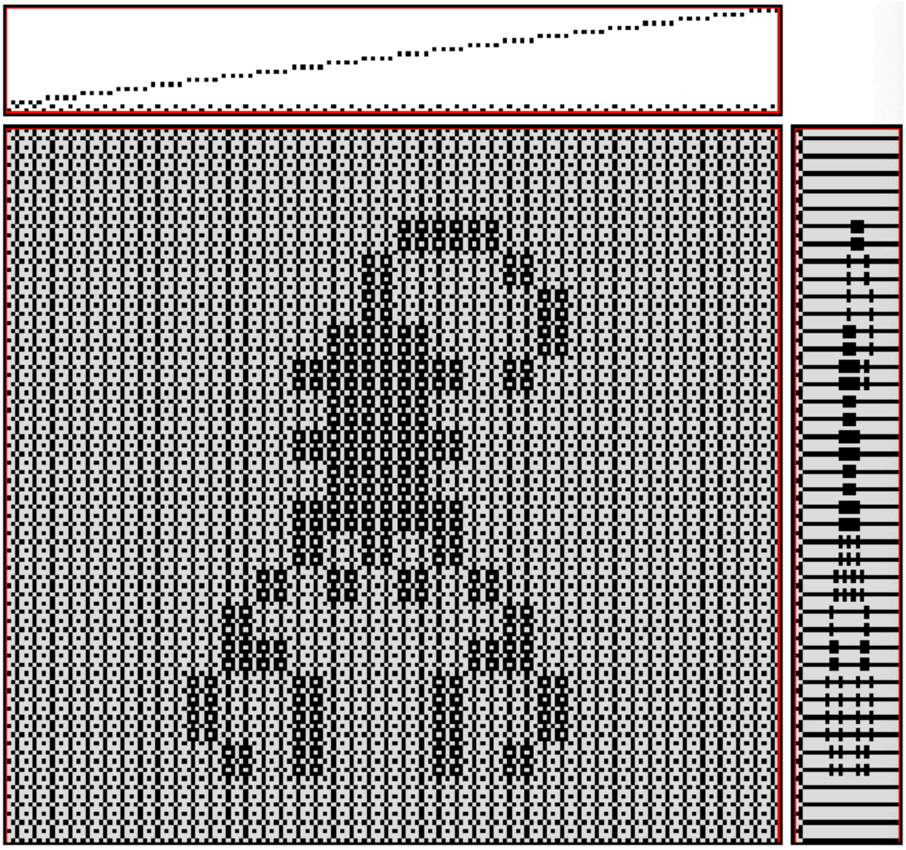
$T_2 = C_1 \circ (R_1 \circ -I)$
$T_2 = (C_1 \circ R_1) \circ -I$
$T_2 = T_1 \circ -I$

T_2 est le symétrique de T_1 par rapport à la verticale



$T_2 = C_1 \circ R_2 = C_1 \circ (R_1 \circ -I) = (C_1 \circ R_1) \circ -I = T_1 \circ -I$

Si l'on remplace le carton C_1 par son symétrique par rapport à l'horizontale $C_3 = -I \circ C_1$, le nouveau tissu $T_3 = C_3 \circ R_1$ sera le symétrique de T_1 par rapport à l'horizontale.



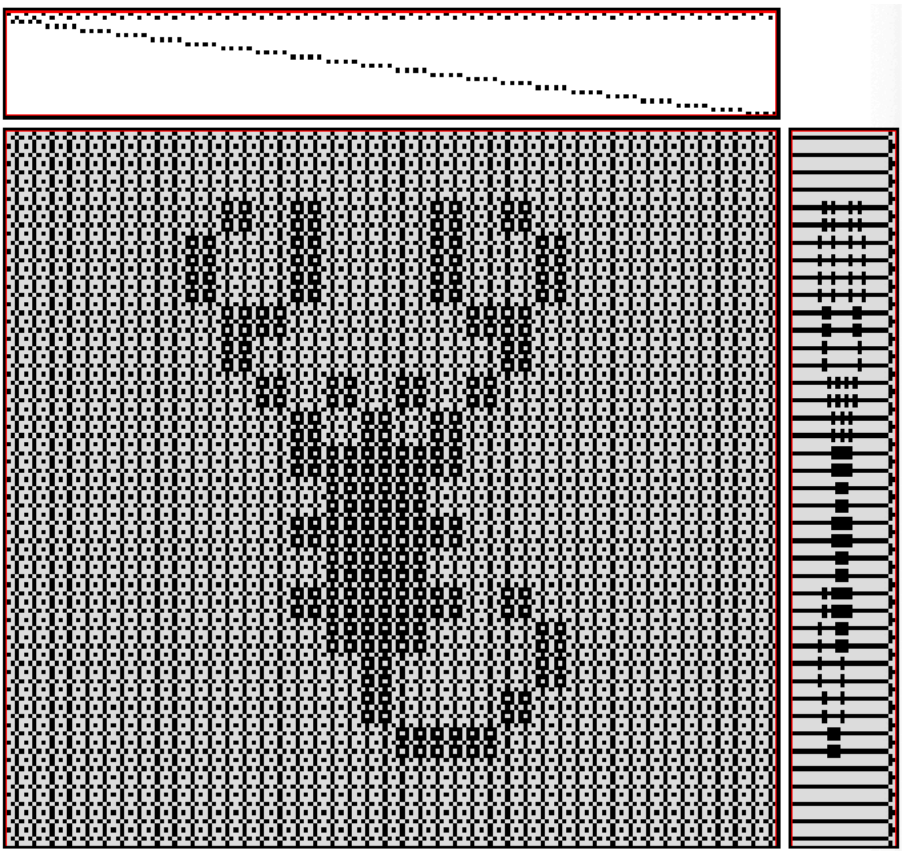
$T_3 = C_3 \circ R_1 = (-I \circ C_1) \circ R_1 = -I \circ (C_1 \circ R_1) = -I \circ T_1$

Plutôt que de retenir par coeur ces résultats , il serait plus profitable de savoir les retrouver rapidement par un calcul sur le diagramme de tissu.Une fois assimilé sur des exemples simples, le calcul sur le diagramme du tissu vous rendra de grands services pour analyser des situations plus complexes. De plus, vous pourrez être satisfait de ne pas avoir lu ces pages rébarbatives pour rien !

Mettez d'accord ceux qui numérotent les cadres de haut en bas et les pédales de droite à gauche avec les autres :

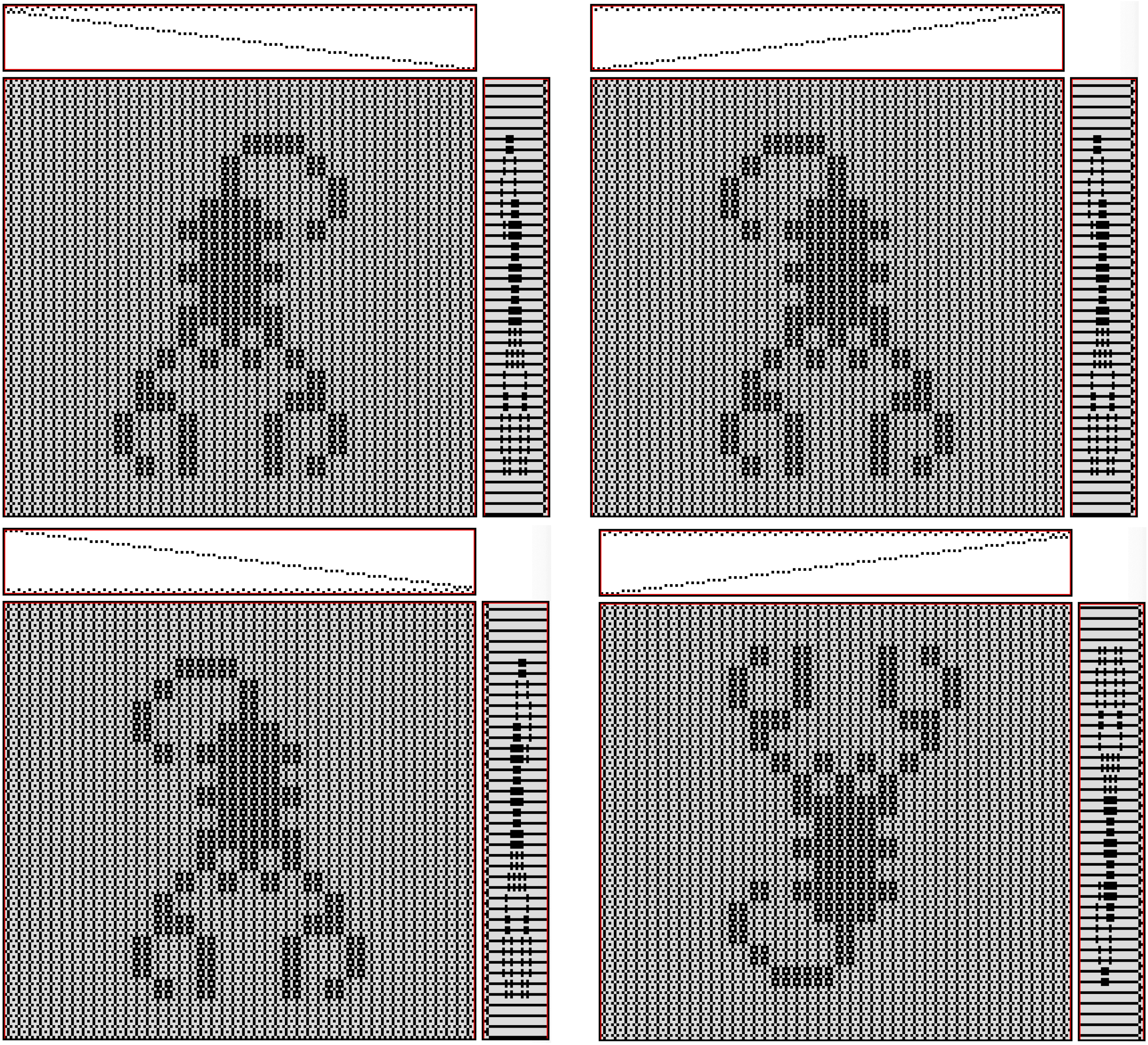
$R_4 = -I \circ R_1$
$C_4 = C_1 \circ -I$

$T_4 = C_4 \circ R_4$
$T_4 = (C_1 \circ -I) \circ (-I \circ R_1)$
$T_4 = C_1 \circ I \circ R_1$
$T_4 = C_1 \circ R_1$
$T_4 = T_1$



$T_4 = C_4 \circ R_4 = (C_1 \circ -I) \circ (-I \circ R_1) = C_1 \circ R_1 = T_1$

A titre d'exercice, saurez-vous décrire ces diagrammes "renversants" à l'aide d'un calcul judicieux ?



Attention
toute symétrie n'est pas bonne pour le tissu ! Toucher à la correspondance entre les cadres et les marches est souvent fatal pour le tissu. Notez également au passage l'importance de l'ordre des calculs de compositions des diagrammes, cette "multiplication" n'est pas commutative.
ici :

$R_4 = -I \circ R_1$

$T_5 = C_1 \circ R_4$

$T_5 = C_1 \circ (-I \circ R_1)$

et

$T_5 \neq T_1$

chapitre 3
représentation du diagramme de tissu à l'aide de matrices.

Nous allons de nouveau regarder le diagramme de tissu à travers une nouvelle lunette mathématique, celle des matrices. Cette manière de voir est très proche de la précédente et nous ne nous y attarderons pas. Toutefois elle va nous permettre d'introduire quelques notions qui manquaient encore à notre édifice.

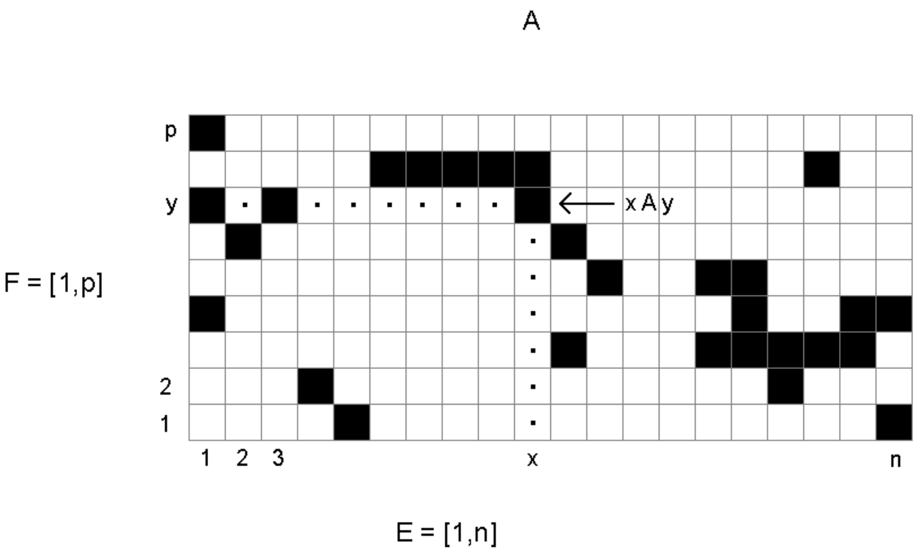
1- DéFINITIONS

Nous pouvons directement considérer un diagramme de relation comme une matrice en précisant les points suivants :

- Les matrices sont définies sur l'ensemble qui contient les deux éléments 0 et 1, muni des deux opérations "ou" et "et" (notées "∨" et "∧")
Une case cochée (noire) sera marquée 1
Une case vide (blanche) sera marquée 0

- On numérotera les lignes d'une relation dans le sens opposé au sens standard pour les matrices, de bas en haut.

Représentation d'un diagramme par une relation



Représentation d'un diagramme par une matrice A (n, p), n colonnes et p lignes.

L'élément de la colonne i et de la ligne j sera noté a_i^j .

$$A\,(\,n,\,p\,)$$

$$F = [1,p] \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} p \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \\ 2 \\ 1 \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \\ & \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1&2&3&&&&&&&i&&&&&&&&&&n \end{array} \end{array}$$

$$E = [1,n]$$

Toutes les notions définies pour les relations peuvent être transcrites dans le langage des matrices :

Relation identique	Matrice unité (inversée).
Réciproque d'une relation	Transposée d'une matrice.
Relation symétrique	Matrice symétrique

2- PRODUIT DE MATRICES

Le parallèle le plus intéressant reste l'équivalence de la composition des relations et du produit des matrices :

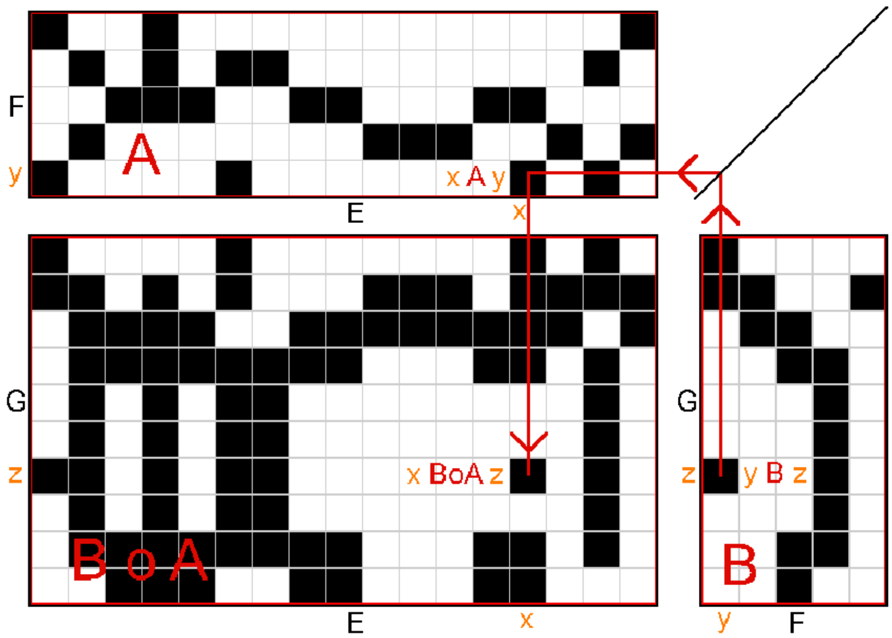
A

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cl}
n & \\
 & \\
 & \\
1 & \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&a_i^k&0&1&0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ k
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1&&&&&&&&&&&&&i&&&m
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1\\
0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&c_i^j&0&1&0\\
0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0
\end{array}\right)
\\
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1&&&&&&&&&&&&&i&&&m
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccc}
1&0&0&0&0\\
1&1&0&0&1\\
0&1&1&0&0\\
0&0&1&1&0\\
0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0\\
b_k^j&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0\\
0&0&1&1&0\\
0&0&1&0&0
\end{array}\right)
\\
\begin{array}{ccccc}
k&&&&n
\end{array}
\end{array}
\quad \mathbf{B}
$$

B o A $\quad c_i^j = \bigvee_{k=1}^{n} a_i^k \wedge b_k^j$

Produit des matrices $\quad c_i^j = \bigvee_{k=1}^{n} a_i^k \wedge b_k^j = a_i^1 \wedge b_1^j \vee a_i^2 \wedge b_2^j \ldots \vee a_i^n \wedge b_n^j$



Composition des relations

3- OPéRATIONS LOGIQUES SUR LES RELATIONS

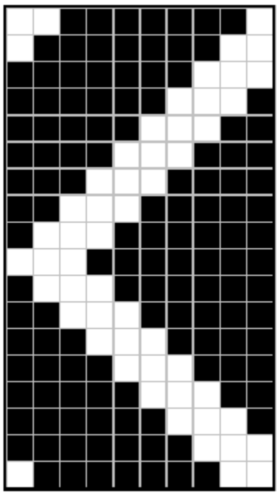
Le premier intérêt de cette représentation est de faire apparaître les opérations logiques effectuées sur les cases du diagramme pour le calcul du tissu. Ces opérations logiques sont décrites, dans la composition des relations, par les différents quantificateurs, mais d'une manière globale. Notons de plus que c'est un calcul de ce type qui est réellement effectué par l'ordinateur pour afficher un tissu.

Le deuxième est de nous permettre de définir, de manière naturelle, des opérateurs logiques sur les diagrammes :

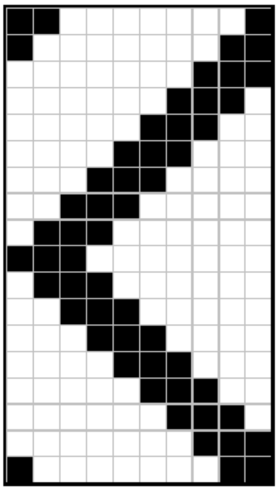
a) Relation "non A"

Etant donné un diagramme $A = (a_i^j)$, on défini le diagramme Non $A = (a'^j_i)$, que l'on note $\neg A$:

$$\forall (i, j) \in N \times P \qquad a'^j_i = \neg a_i^j$$



A



¬A

Les 1 deviennent des 0 et réciproquement.

$\neg 0 = 1$

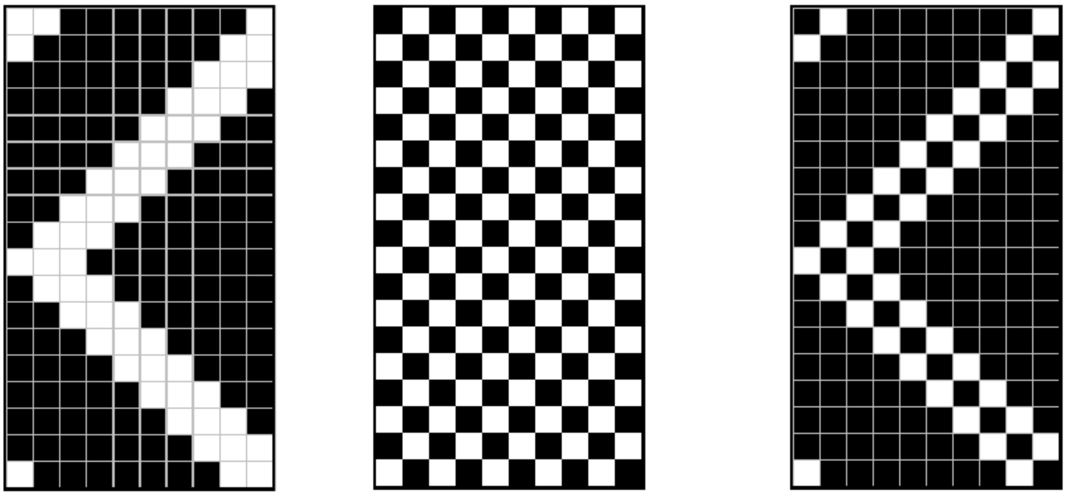
et $\neg 1 = 0$

Les cases pleines (noires) deviennent vides (blanches) et réciproquement.

b) Relation "A ou B"

Etant donnés deux diagrammes $A = (a_i^j)$ et $B = (b_i^j)$ de même taille, on définit le diagramme "A ou B" $= (c_i^j)$, que l'on note $A \vee B$:

$$\forall (i, j) \in N \times P \qquad c_i^j = a_i^j \text{ ou } b_i^j = a_i^j \vee b_i^j$$



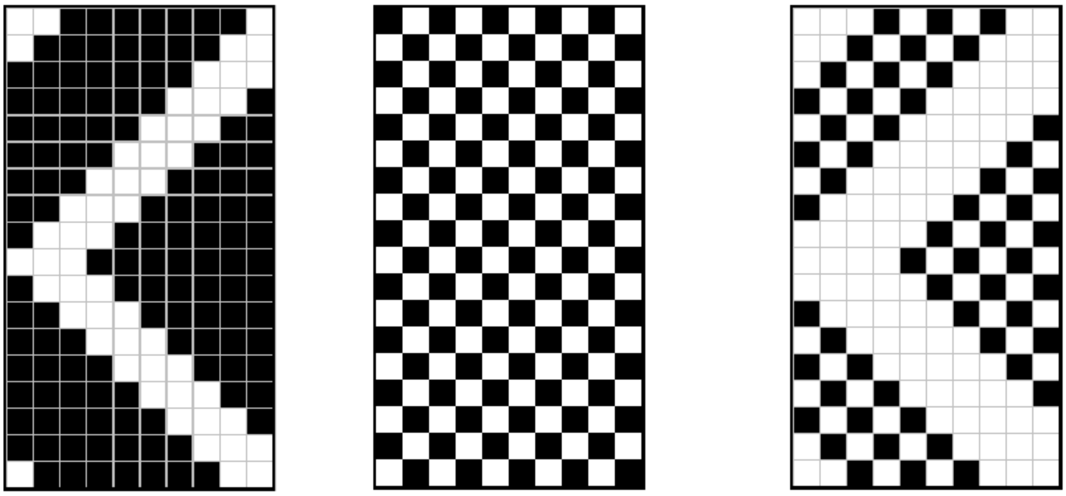
A B $A \vee B$

Le diagramme "A ou B" est obtenu en superposant le diagramme de A à celui de B, chaque case cochée, dans A ou dans B, sera cochée dans "A ou B"

c) Relations "A et B"

Etant donnés deux diagrammes $A = (a_i^j)$ et $B = (b_i^j)$ de même taille, on définit le diagramme "A et B" $= (c_i^j)$, que l'on note $A \wedge B$:

$$\forall (i, j) \in N \times P \qquad c_i^j = a_i^j \text{ et } b_i^j = a_i^j \wedge b_i^j$$



A B $A \wedge B$

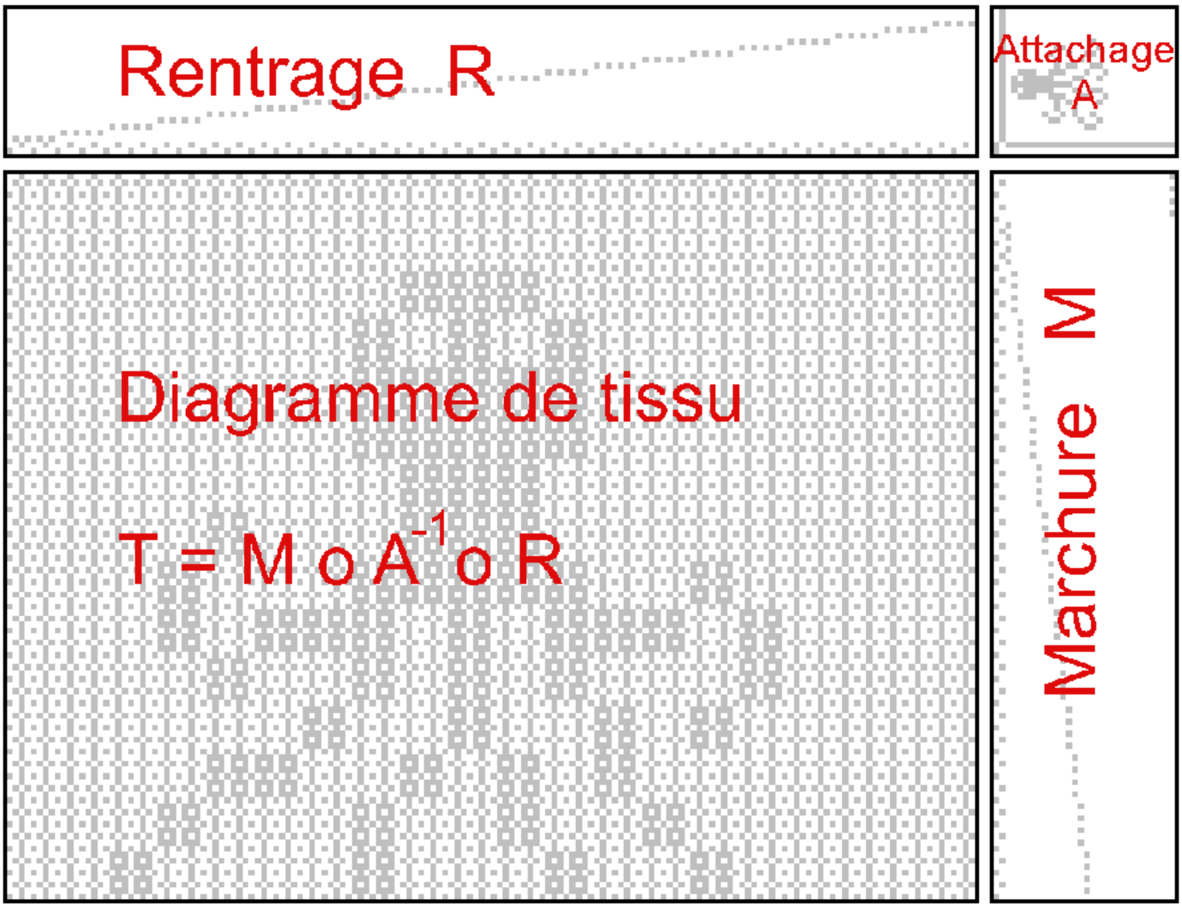
Le diagramme "A et B" est obtenu en superposant le diagramme de A à celui de B, chaque case cochée, à la fois dans A et dans B, sera cochée "A et B".

C REPRéSENTATION DU TYPE
"RENTRAGE - ATTACHAGE - MARCHURE - DIAGRAMME DE TISSU"

Nous allons aborder maintenant la représentation du tissu par un diagramme comportant quatre éléments : le rentrage, l'attachage, la marchure et le diagramme de tissu. Rappelons que l'intérêt primordial de l'utilisation de l'attachage est de permettre de séparer différents aspects d'un tissu, comme ses qualités purement graphiques de ses caractéristiques de contexture. Ce type de diagramme de tissu permet donc une étude complète des armures. Il nous restera cependant à y adjoindre les diagrammes de couleurs pour avoir une vision globale du tissu.

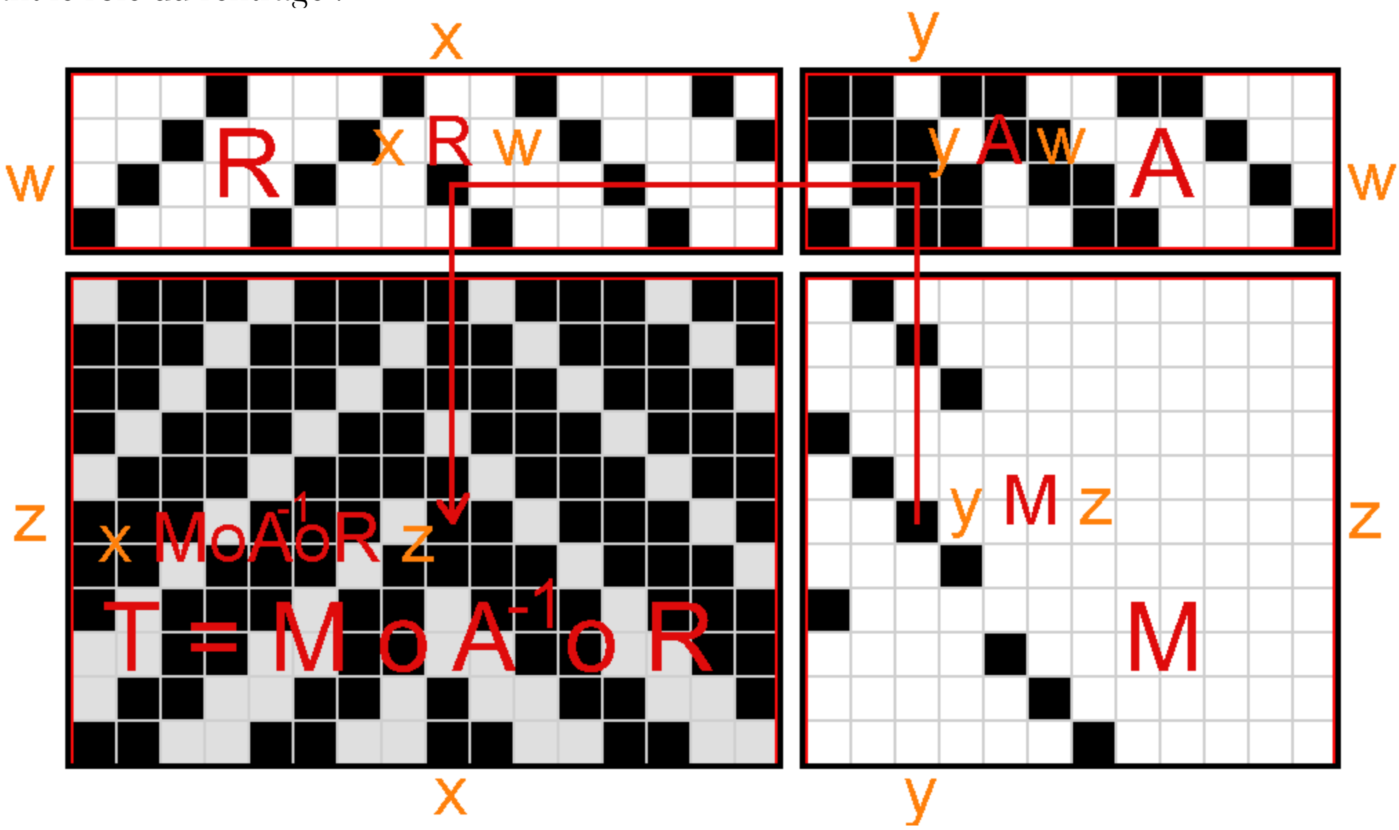
chapitre 1
définition
1- FORMULE DU DIAGRAMME DE TISSU

Dans la première représentation du tissu, du type "carton-rentrage-diagramme de tissu", chaque pédale actionnant un cadre et un seul : il y a une correspondance directe entre les pédales et les cadres. Dans la représentation "rentrage-attachage-marchure-diagramme de tissu" il y a deux nouveaux diagrammes : l'attachage et la marchure. La marchure comporte des marches, ou pédales, qui sont attachées à des contremarches, comme indiqué dans l'attachage, chacune des contremarches commandant un cadre. Ajouter un attachage, c'est un peu placer un intermédiaire entre la marchure, qui joue le rôle d'un pré-carton, et le rentrage :



Chaque marche, chaque colonne de la marchure, est "attachée" à une ou plusieurs contremarches, à une ou plusieurs lignes de l'attachage. Le diagramme d'attachage indique la correspondance de chaque marche de la marchure avec une ou plusieurs contremarches qui actionnent chacune un cadre.

Pour savoir quels sont les cadres levés à une certaine duite, il suffit de regarder dans la marchure quelles sont les marches actionnées, puis de lire dans l'attachage quels sont les cadres commandés par chacune de ces marches. Cette démarche ressemble étrangement à un calcul de tissu, l'attachage jouant le rôle du rentrage !



Pour la duite z, la marche y est enfoncée, pour actionner (entre autres) la contremarche w, qui lève le cadre w, qui lève (entre autres) le fil x à la duite z.

y M z et y A w et x R w
x R w et y A w et y M z
x R w et w A^{-1} y et y M z — car y A w <=> w A^{-1} y
x |__w__| |__y__| z — Notez les variables intermédiaires

x MoA^{-1}oR z — Notez que c'est la réciproque de l'attachage A^{-1} qui intervient dans la formule de tissu et non l'attachage A.

On obtient donc la formule du tissu dans la représentation "rentrage-attachage-marchure-diagramme de tissu" (la formule du tissu avec attachage) :

$$T = M \circ A^{-1} \circ R$$

Cette formule du tissu avec attachage T = M o A^{-1} o R , peut être vue comme deux calculs successifs simples :

Premier calcul, le calcul du carton C = (M o A^{-1})
Deuxième calcul, le calcul du tissu T = C o R

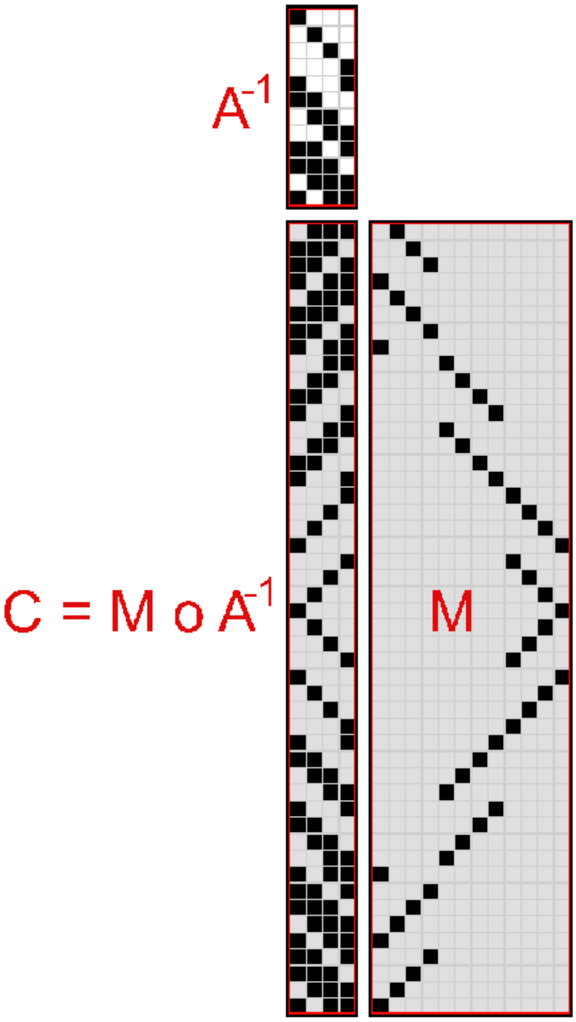
T = (M o A^{-1}) o R	Le calcul du tissu simple, en représentation carton-rentrage, avec comme carton C = (M o A^{-1})
T = M o A^{-1} o R	Le calcul du tissu avec attachage

Premier calcul :

Pour obtenir le carton, c.-à-d. le diagramme où sont notés à chaque duite (sur chaque ligne), les cadres levés, il suffit de calculer le tissu comprenant, la marchure comme carton, et, la réciproque de l'attachage comme rentrage.

$C = (M \circ A^{-1})$

Le carton C la composée de la réciproque de l'attachage A^{-1}, suivie de la marchure M.



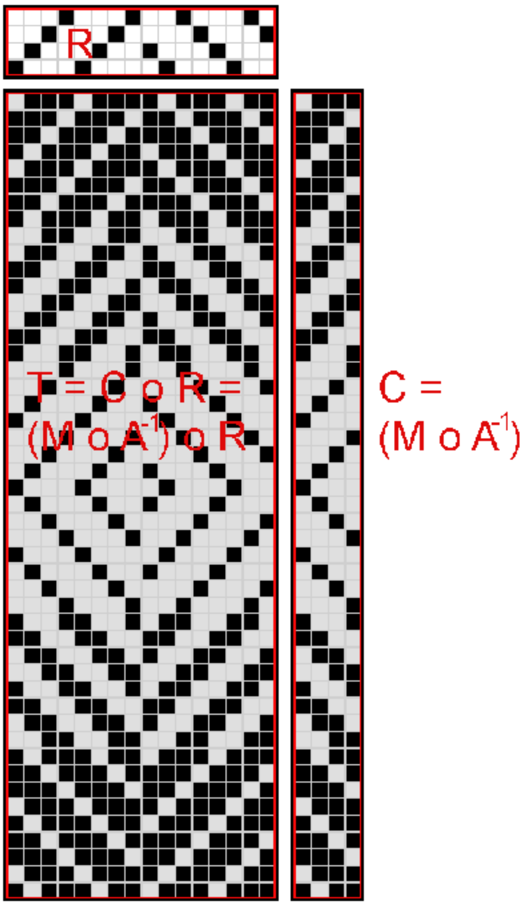
Deuxième calcul :

Le calcul du tissu
$T = C \circ R$
avec le carton C résultat du calcul précédent $C = (M \circ A^{-1})$

$T = C \circ R$

$T = (M \circ A^{-1}) \circ R$

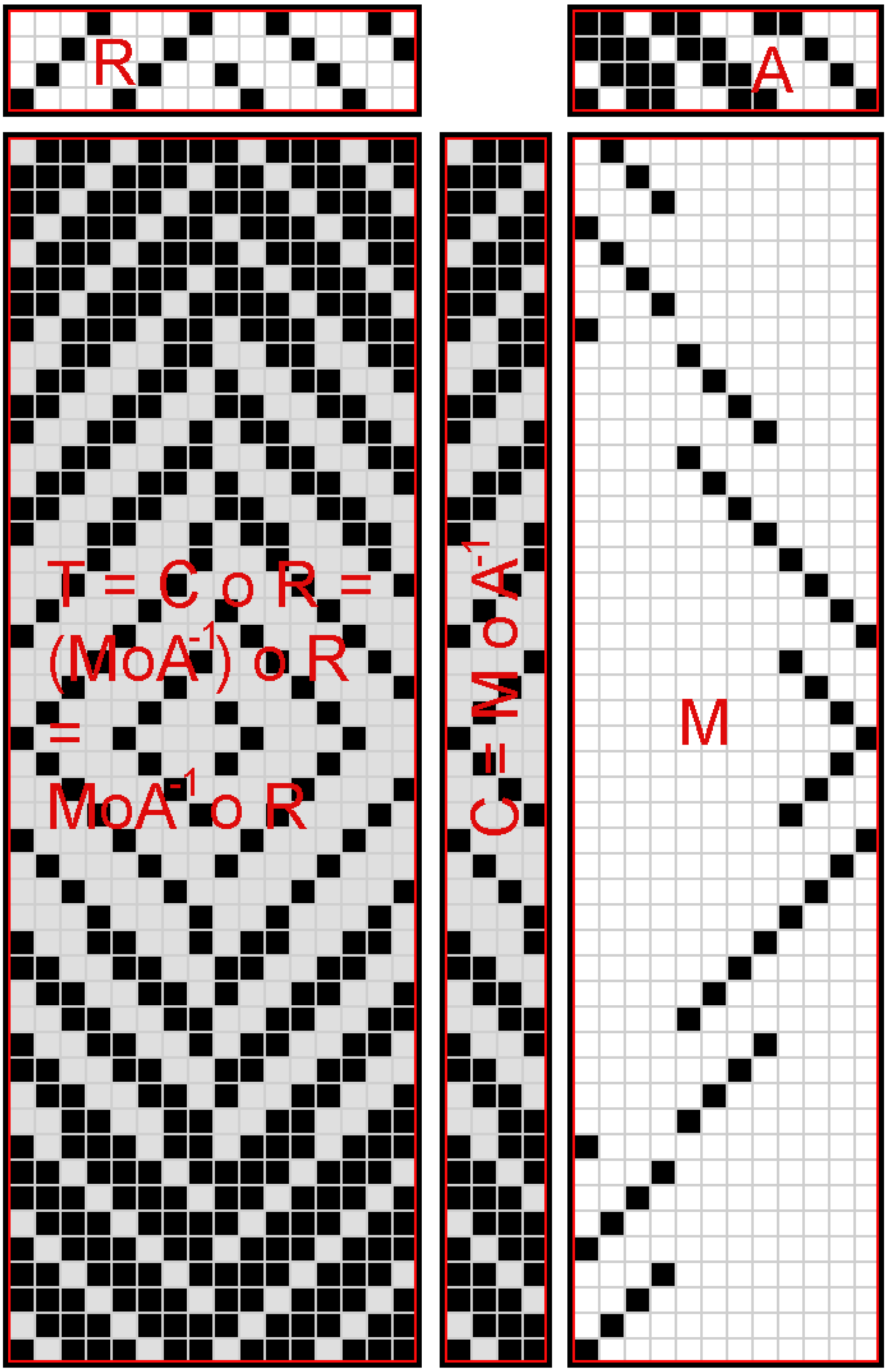
$T = M \circ A^{-1} \circ R$



Le tissu dans la représentation "rentrage-attachage-marchure-diagramme de tissu"

$T = M \circ A^{-1} \circ R$

Avec en plus, à gauche de la marchure, le carton C, résultat du calcul intermédiaire
$C = (M \circ A^{-1})$



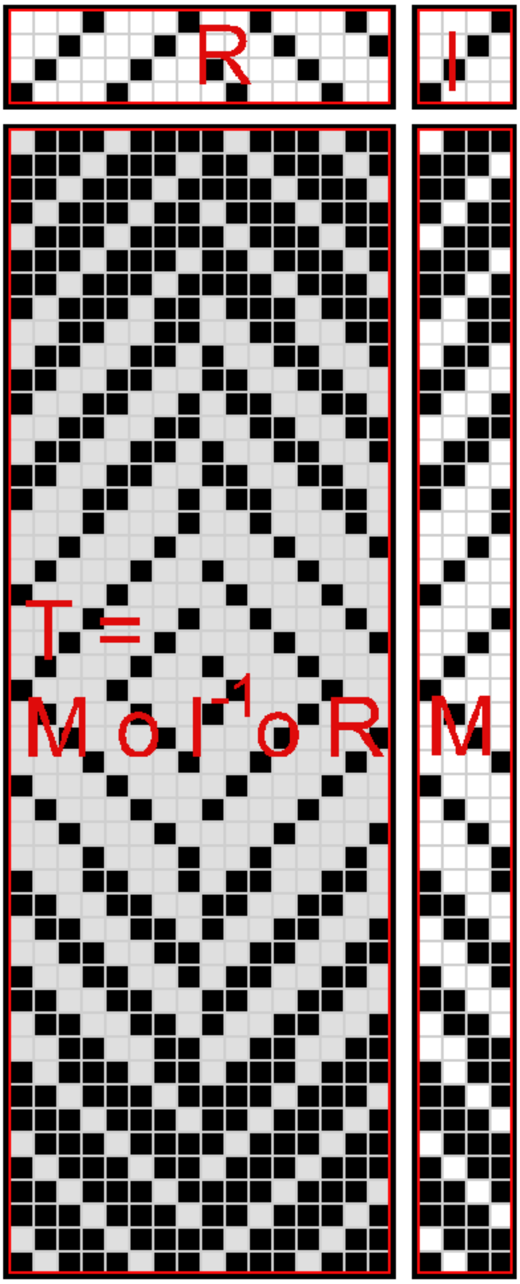
$T = M \circ A^{-1} \circ R$

Cette formule simple sera la base de notre étude des armures.

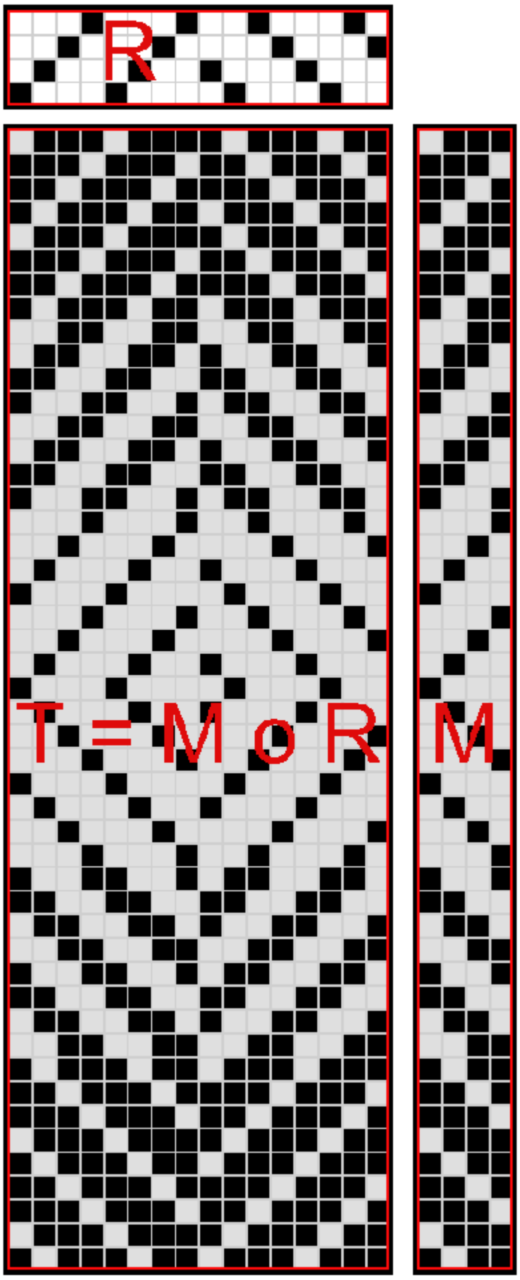
Le schéma simplifié d'un tissu est facile à retenir et vous permettra de retrouver rapidement les propriétés du diagramme du tissu ; c'est de plus un outil d'analyse simple qui vous permettra de vous repérer dans des situations plus complexes.
Notez encore que malgré la position de l'attachage A dans le schéma complet du tissu, c'est sa réciproque A^{-1} qui intervient dans le calcul.
Notez une fois de plus que bien que la notation du calcul soit de type multiplicatif, la composition des diagrammes n'est pas commutative, l'ordre d'écriture des diagrammes est fondamental.

2- COMPATIBILITé DES REPRéSENTATIONS

La représentation simple du diagramme de tissu à l'aide du carton et du rentrage peut être considérée comme une représentation complète si l'on considère que l'on utilise sans le savoir un attachage suivi I :



T = M o I^{-1} o R



T = M o R

Calculons le tissu complet

T = M o I^{-1} o R

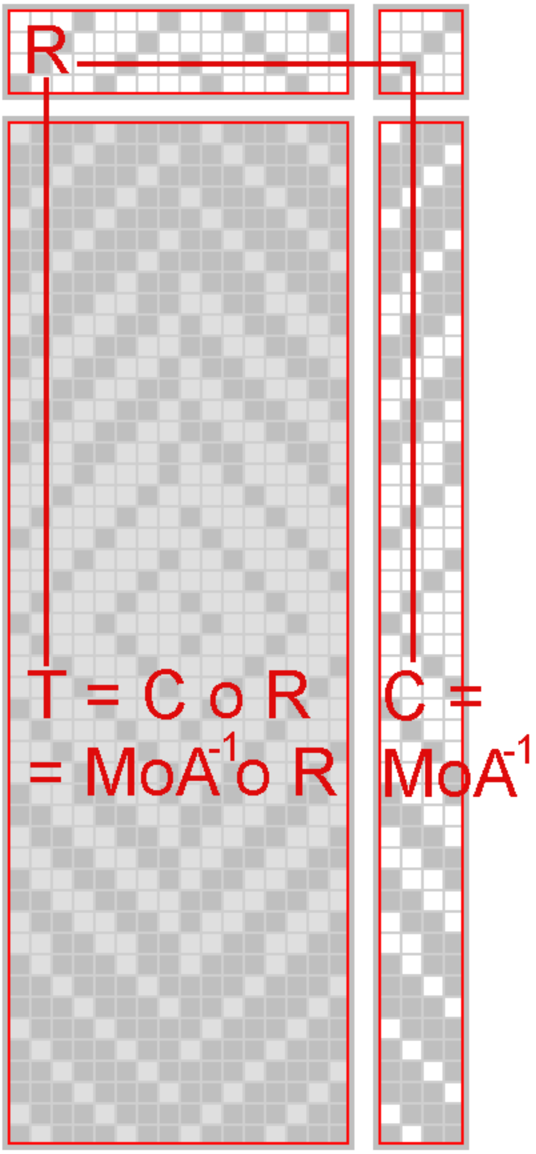
T = M o I o R car nous savons que $I^{-1} = I$

T = M o R car nous pouvons simplifier par I

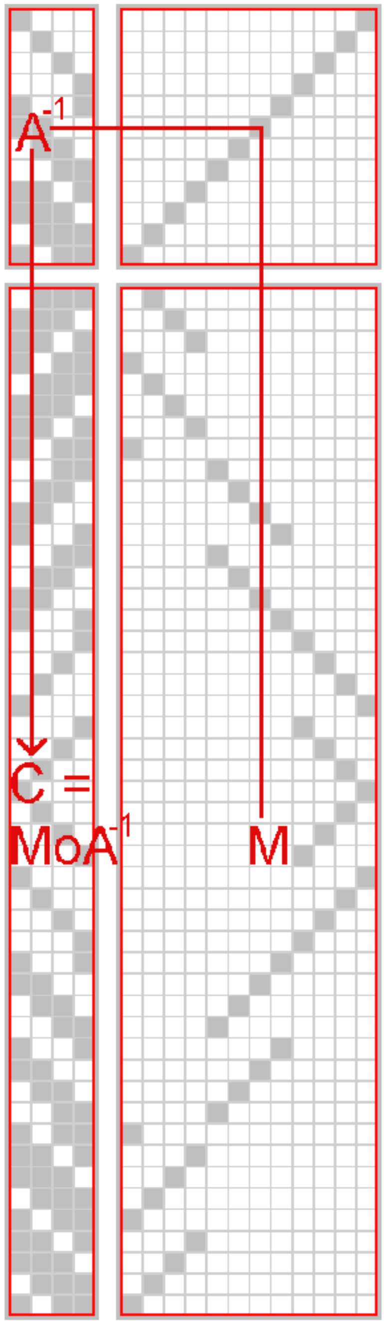
La diagonale que nous dessinions pour assurer la correspondance entre les marches et les cadres peut donc être considérée comme un diagramme à part entière du tissu, c'est son attachage, il est suivi. Désormais nous ne parlerons plus de diagramme de tissu à deux ou à trois éléments, nous considérerons qu'un diagramme de tissu contient toujours un rentrage, un attachage et une marchure. Nous préciserons le cas échéant si l'attachage est suivi.

Passage de la représentation du type "marchure-attachage-rentrage" à la représentation type "carton-rentrage"
Diagramme multiple de tissu

Lorsque l'attachage n'est pas suivi, le carton n'apparaît pas dans le schéma complet d'un tissu. Pourtant si l'on utilise une ratière, une représentation du carton est nécessaire.
Précédemment nous avons vu que pour obtenir le carton C il suffisait de calculer M o A^{-1} ; le tissu peut ensuite être présenté sous la forme T = C o R :

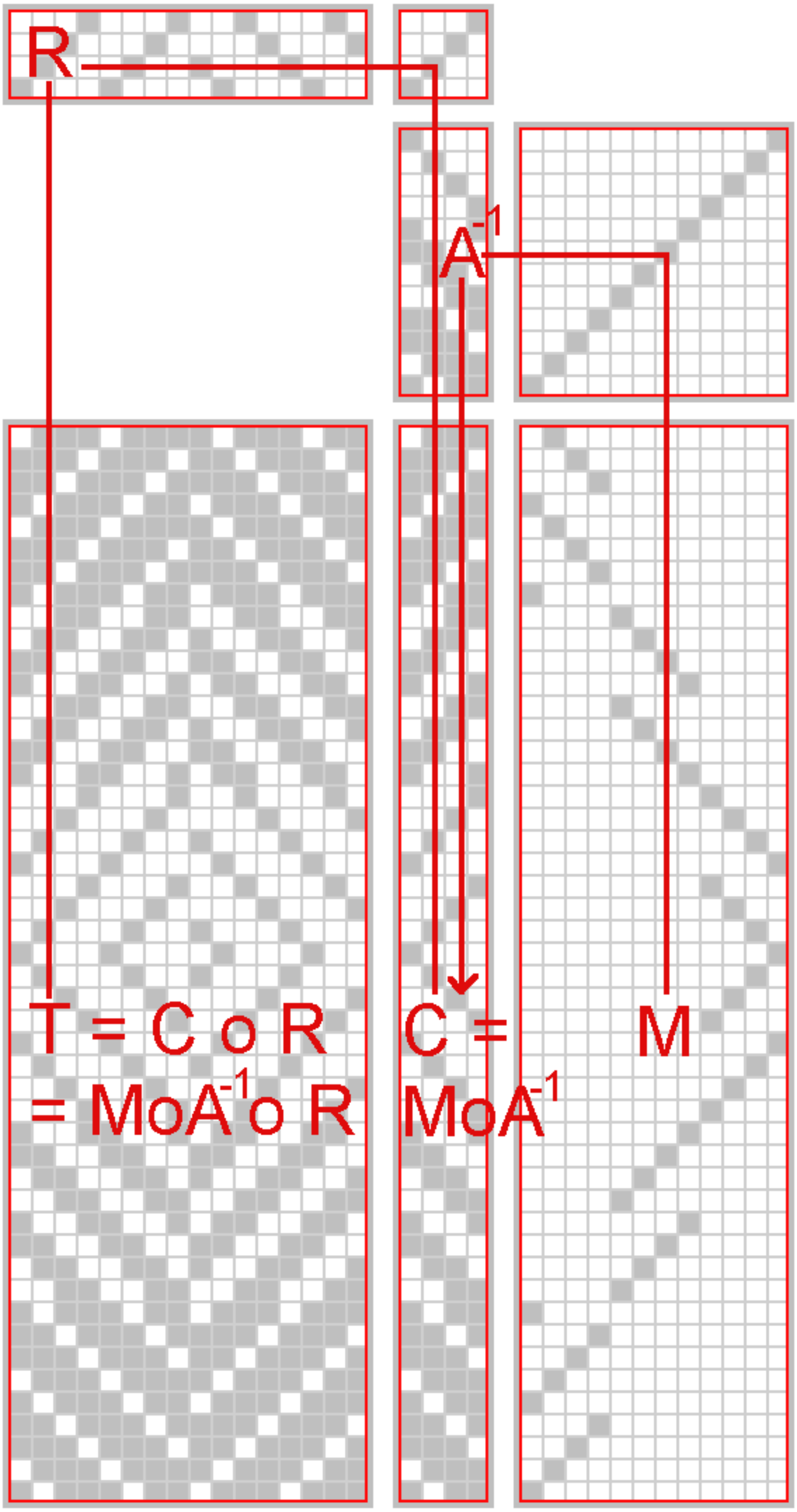


T = C o R



C = (M o A^{-1})

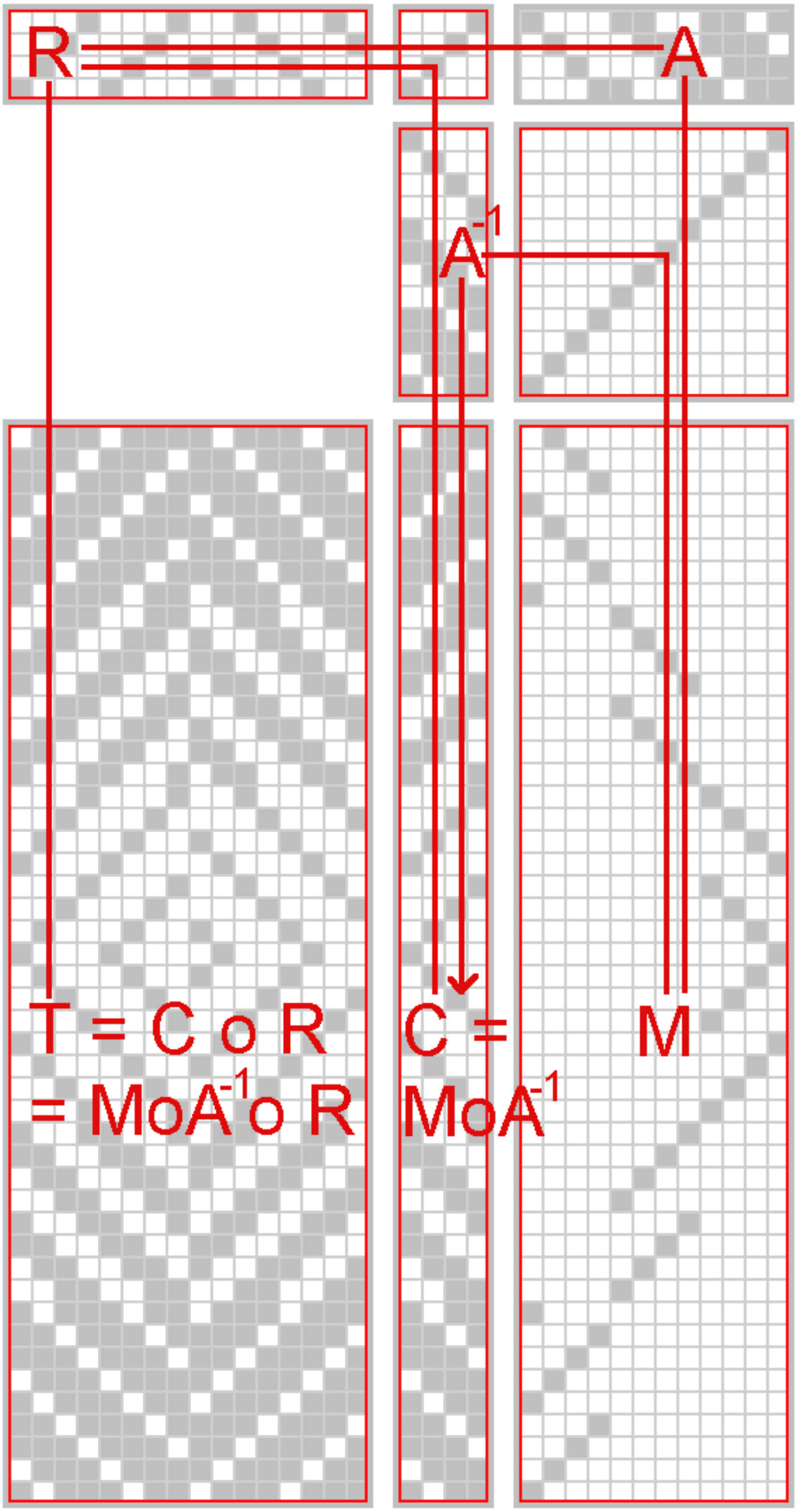
Le diagramme du carton est commun à ces deux schémas. Dans le premier, à droite, il figure comme résultat, dans le second, à gauche, il participe au calcul du tissu T. Nous allons assembler ces deux schémas en un seul :



Le carton $C = M \circ A^{-1}$ n'est dessiné qu'une seule fois, il participe à deux calculs différents.

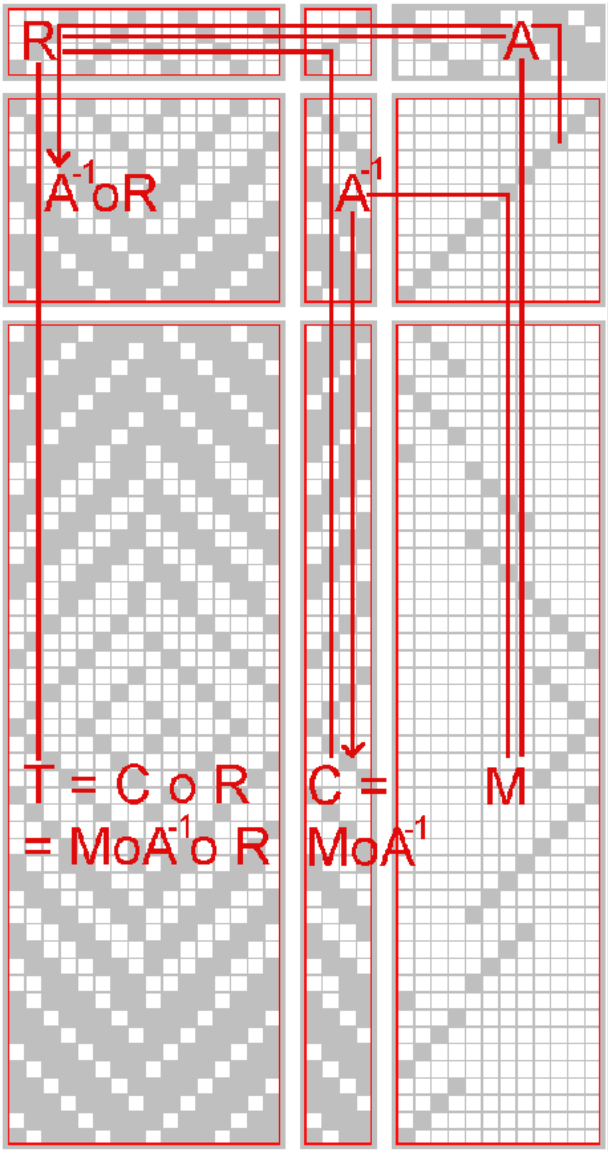
Si nous avons été capables de faire figurer deux calculs sur le même schéma, pourquoi pas trois ! Pour avoir une vision du tissu sous tous ses aspects, il faudrait qu'on puisse lire également sur le même schéma le diagramme de départ du tissu : $T = M \circ A^{-1} \circ R$

La case libre, en haut à droite, du schéma général semble avoir été réservée pour l'attachage A ! Un troisième calcul peut alors être lu, celui du tissu avec attachage : $T = M \circ A^{-1} \circ R$, en ne considérant que les cases formant les coins du schéma général.



Nous appellerons un tel schéma, où plusieurs diagrammes de tissu peuvent être lus, un diagramme multiple de tissu. Sur un diagramme multiple de tissu, une flèche indiquera le sens d'un calcul de tissu particulier ; la flèche partira de la case jouant le rôle de la marchure, tournera dans la "case attachage" en cause, vers la "case rentrage" pour terminer sur le résultat du calcul dans la "case tissu". Suivant un calcul ou un autre, la même case pourra jouer tour à tour un rôle différent ; dans notre exemple le carton est soit une case tissu, soit une case marchure.
Les flèches indiqueront un calcul juste. En effet avec un diagramme multiple de 9 cases, comme celui que nous étudions, on pourrait lire autant de calculs qu'il existe de groupe de quatre cases formant les quatre coins d'un rectangle. Tous ces calculs n'ont pas de raison à priori d'être justes ; il convient donc d'être prudent en lisant un diagramme multiple de tissu.

Examinons ce premier exemple de plus près :

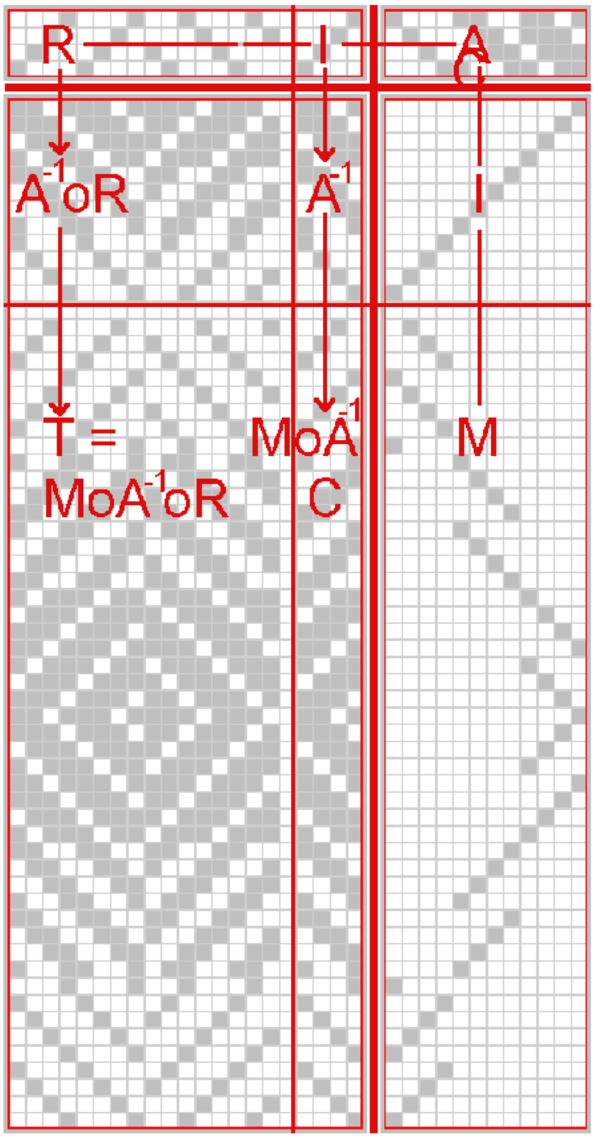


Sous le rentrage reste une case vide remplissons la en faisant le calcul du tissu comprenant les quatre cases en haut et à gauche : A^{-1} o I o R, soit A^{-1} o R. Une troisième manière d'obtenir notre tissu T apparait, en faisant le calcul avec les deux cases inférieures de la colonne de droite et les deux cases inférieures de la colonne gauche : M o I^{-1} o (A^{-1} o R) = M o A^{-1}o R . Ce calcul est juste, nous retrouvons bien comme résultat notre tissu T.

Avec les cases en haut à droite nous avons un autre calcul juste : I o A^{-1} o I = A^{-1}.Comme avec les deux cases supérieures de la colonne de droite et les deux cases supérieures de la colonne de gauche : I o A^{-1} o R = A^{-1} o R . Avec les deux cases de droite de la ligne du haut et les deux cases de droite de la ligne du bas nous trouvons une autre manière de calculer le carton : M o A^{-1} o I = M o A^{-1}.

En fait un seul calcul est faux, celui effectué avec les quatre cases en bas et à gauche :
(M o A^{-1}) o $(A^{-1})^{-1}$ o (A^{-1} o R)
En développant on obtient : M o A^{-1} o A o A^{-1} o R qui est en général différent de T = M o A^{-1} o R .
Notons que d'après les règles établies précédemment il suffirait que A soit injectif ou une application pour que le résultat soit vrai ; on aurait alors soit A^{-1} o A = I soit A o A^{-1} = I .
Rassurez- vous on n'est pas forcément amené à vérifier tous les calculs possibles dans un diagramme multiple, on s'attachera le plus souvent à deux ou trois tissus principaux.

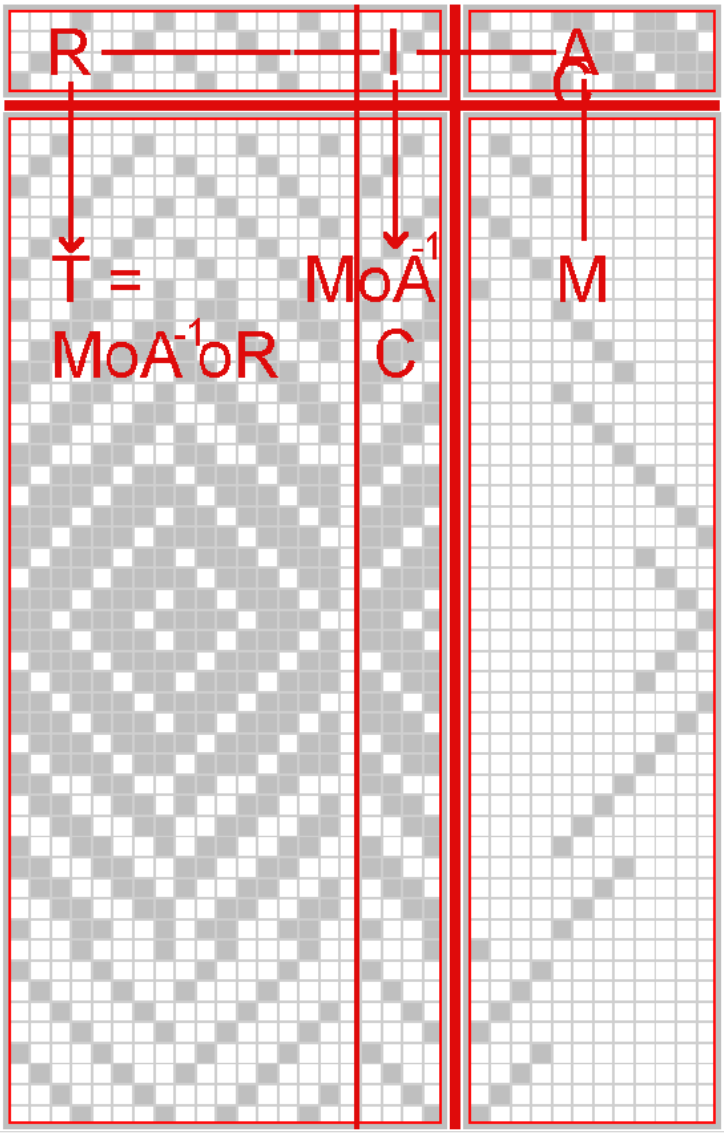
Reposons le problème initial : nous cherchons une manière de passer d'une représentation d'un tissu avec attachage à une représentation du type carton attachage suivi. Nous avons vu qu'il était possible d'y arriver faisant faire deux calculs successifs de tissu à l'ordinateur. Ensuite nous avons regroupé ces calculs sur un seul schéma... pourquoi ne pas faire faire un seul calcul à l'ordinateur !
C'est ce que nous allons faire, mettant ainsi évidence un intérêt très pratique des diagrammes multiples de tissu.
Composons artificiellement un rentrage composite forme de la juxtaposition du rentrage R et d'un rapport suivi I ; formons de la même manière une marchure composite formée de la marchure M sur laquelle on placera un rapport suivi I ; prenons A comme attachage et calculons ce tissu composite. Nous obtenons directement le diagramme multiple.
L'ordinateur ne fait pas de différence entre chacune des parties de la marchure et du rentrage, il calcule globalement mais toujours avec l'algorithme du diagramme de tissu, les calculs réellement effectués sont donc toujours justes.



Pour repérer le calcul réellement effectué par l'ordinateur, nous tracerons avec des traits plus épais les deux axes de séparation du rentrage de l'attachage et de la marchure. Les calculs justes sont donc ceux qui utilisent l'attachage dans le coin haut droit, une partie de la marchure composite et une partie du rentrage composite ; soit ceux qui font intervenir une partie de la colonne de droite et une partie de ligne du haut. D'autres calculs faits à partir des cases "résultat" (du calcul réel) sont aussi

vrais, ici le diagramme sous la forme carton - attachage suivi, bien qu'ils ne soient pas effectués par l'ordinateur, sinon le diagramme multiple n'aurait pas d'intérêt.
Le diagramme multiple de tissu est donc également un nouvel outil de calcul qui va nous permettre de passer automatiquement d'un diagramme de tissu à un autre diagramme de tissu ; ici le diagramme du tissu de type carton attachage suivi a été calculé automatiquement à partir du diagramme avec attachage. Cet outil est très puissant et nous l'utiliserons abondamment par la suite, en particulier pour le télescopage.

En fait, pour notre problème précis, le diagramme multiple utilisé est trop complexe. En effet nous n'avons pas besoin de connaître l'incidence de l'attachage sur le rentrage. En supprimant la ligne de cases du milieu nous allons obtenir le diagramme multiple type : passage de la représentation avec attachage à la représentation du type carton attachage suivi.



En rajoutant un rapport suivi dans le rentrage, nous obtenons, en un seul calcul, le tissu sous la forme carton attachage suivi (Pointcarré permet d'afficher le carton ou non).

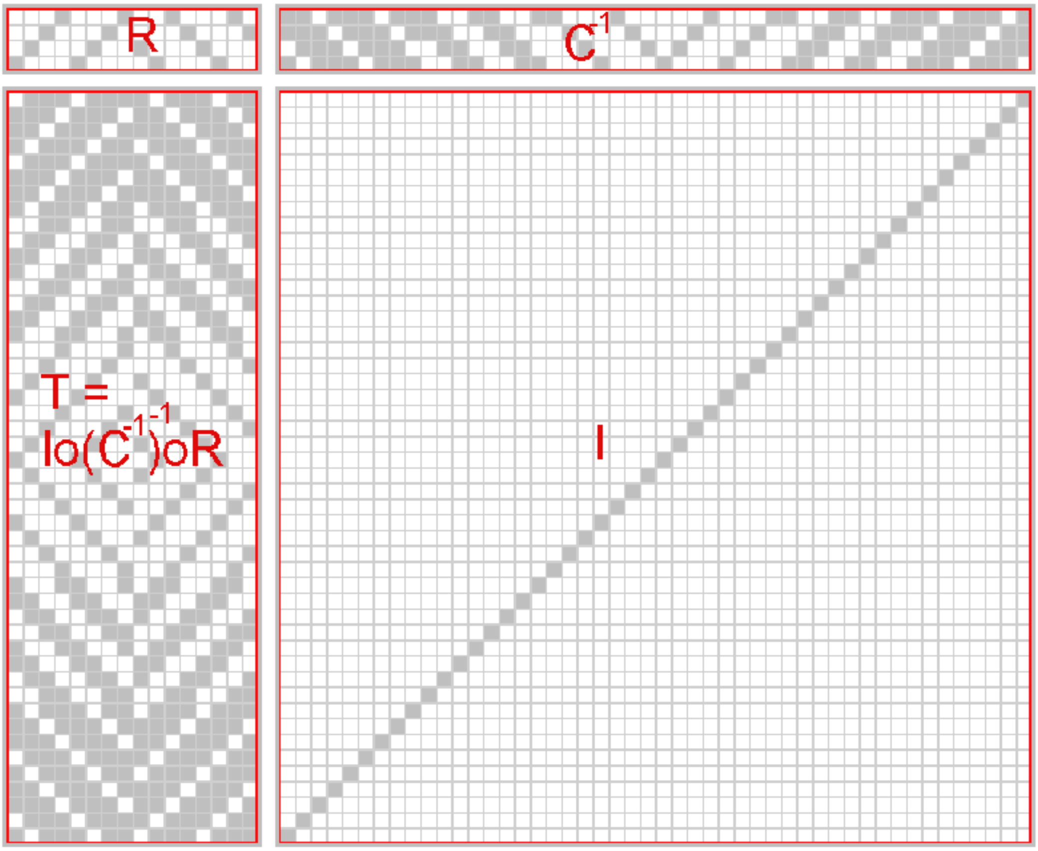
L'outil "diagramme multiple de tissu" dont nous venons d'étudier un exemple complet va nous être d'un grand secours pour nos recherches ultérieures. L'intérêt de ce chapitre dépasse donc largement le problème particulier du passage d'une représentation du diagramme de tissu à l'autre.
Nous utiliserons systématiquement les diagrammes multiples de tissus dans la seconde partie de cet ouvrage.

D PREMIèRES CONSéQUENCES PRATIQUES DE LA FORMULE DU TISSU

Le modèle mathématique que nous venons de construire va nous permettre dans un premier temps de prendre du recul par rapport au tissage. Vues d'un regard neuf, certaines propriétés du diagramme de tissu, confusément ressenties, vont paraître plus claires, certaines notions seront précisées. Dans un second temps la maîtrise rigoureuse du diagramme de tissu va nous permettre d'aller plus loin dans la théorie du tissage. De nouvelles manipulations des différents diagrammes seront possibles, des méthodes générales de mise en contexture des courbes complexes pourront être développées.
Commençons par regarder quelques situations simples du diagramme de tissu, à l'aide de ce nouveau projecteur qu'est la formule du tissu : $T = M \circ A^{-1} \circ R$

chapitre 1
une autre présentation du diagramme du tissu

Certains auteurs notent un tissu en présentant le carton dans le prolongement du rentrage. Voyons comment interpréter cette représentation dans notre schéma habituel.



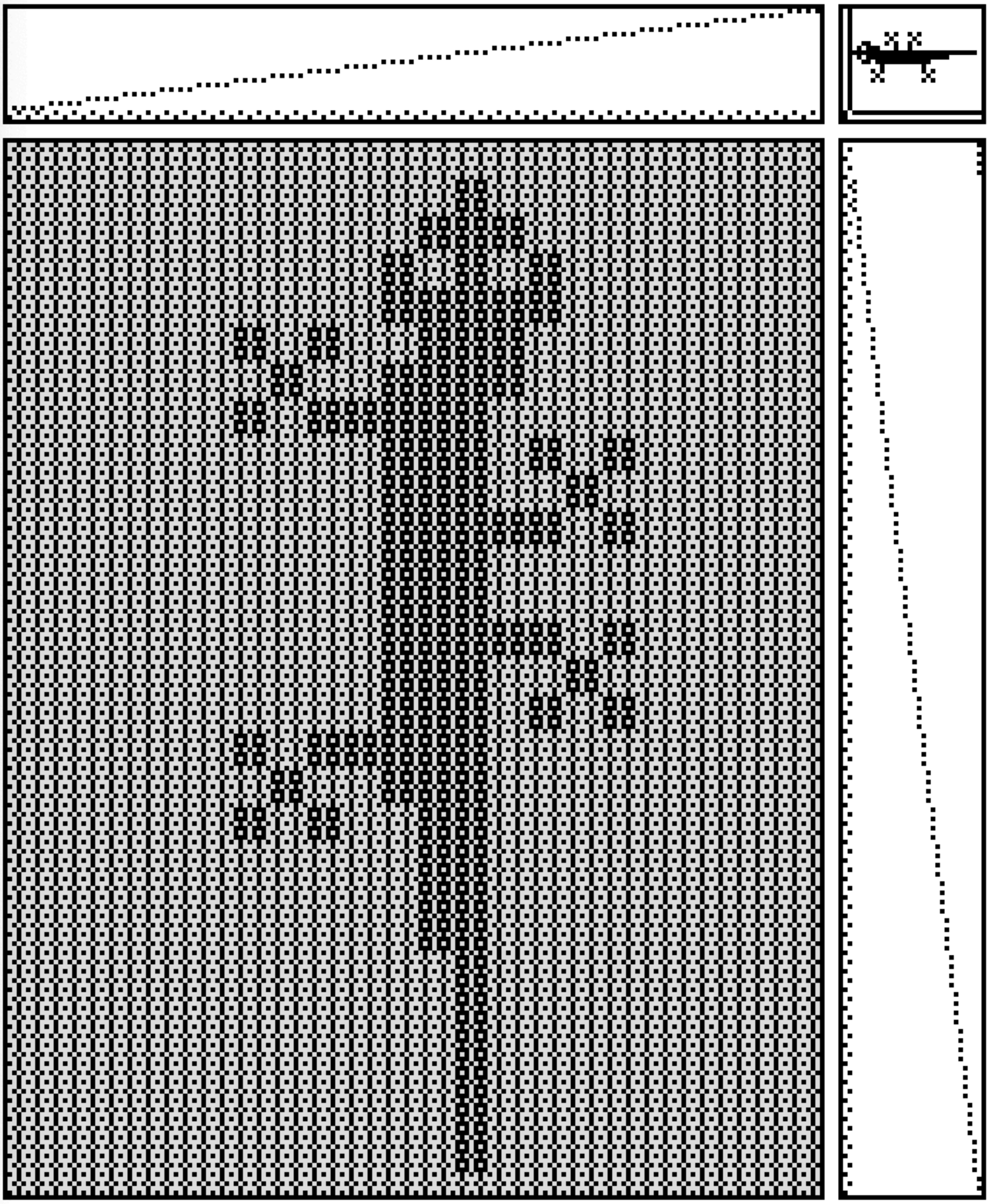
$T = I \circ (C^{-1})^{-1} \circ R = I \circ C \circ R = C \circ R$

Nous avons vu que, en dehors du rentrage, l'information concernant le tissu est répartie entre l'attachage et la marchure. Dans le cas d'une représentation type rentrage-attachage suivi-carton cette information est concentrée dans le carton, l'attachage se réduisant à I. A l'opposé, la représentation dont nous nous occupons concentre toute cette information dans l'attachage, la marchure se réduisant à I. L'attachage est alors égal à C^{-1}, c.-à-d. à la réciproque du carton.
L'intérêt de cette représentation saute aux yeux : pouvoir noter un tissu sur une feuille qui est plus large que haute !

transformations géométriques d'un diagramme

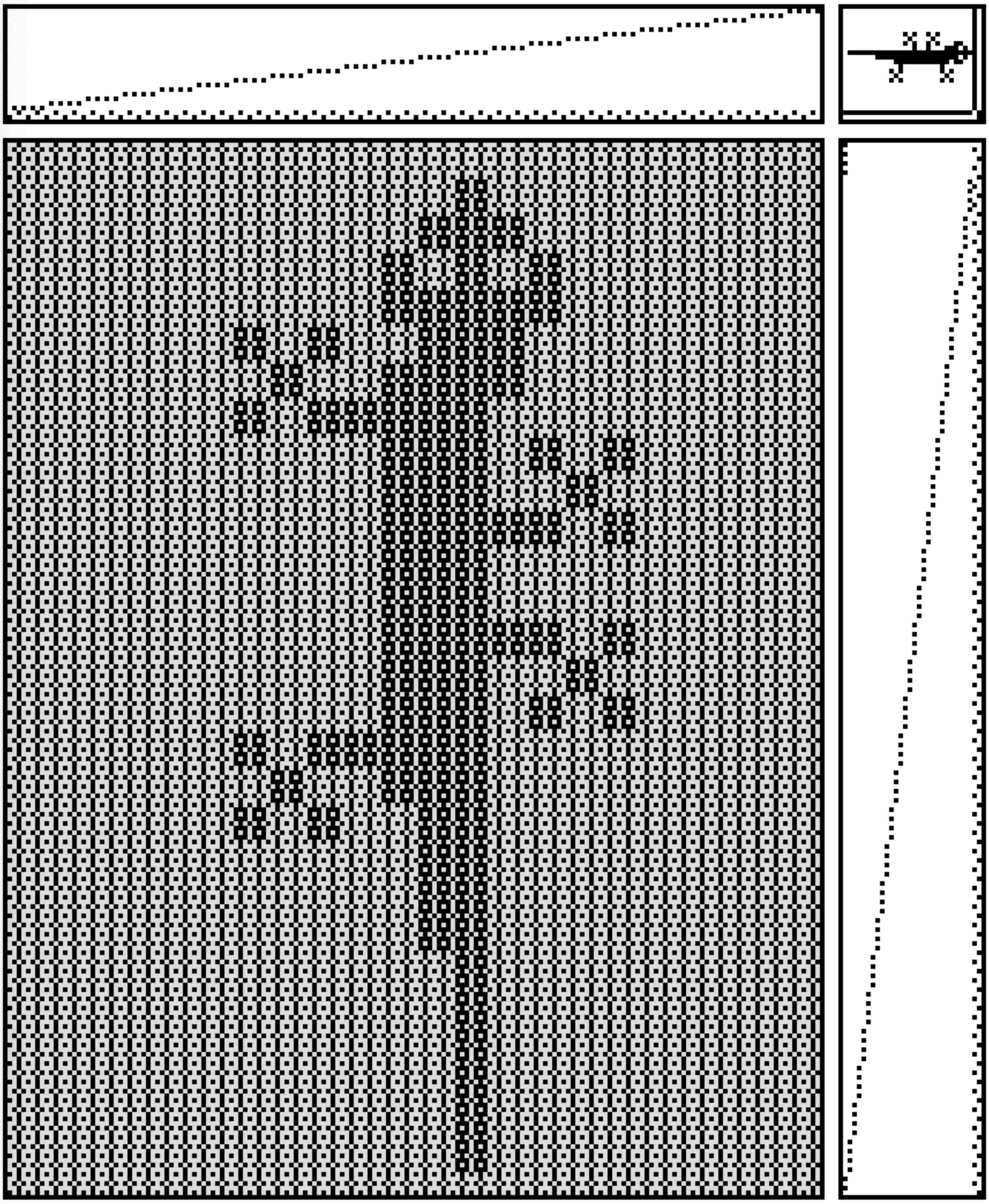
La formule du tissu $T = M \circ A^{-1} \circ R$ nous permet de généraliser rapidement les résultats déjà obtenus (Première partie B 12) au diagramme de tissu avec attachage. On peut faire subir à un attachage rectangulaire une symétrie par rapport à l'horizontale, ou une symétrie par rapport à la verticale, ou une rotation de 180°. A condition d'appliquer une symétrie judicieuse sur le rentrage ou la marchure ou les deux, on peut assurer l'invariance du tissu :

Considérons un tissu du type "marchure-attachage-rentrage".



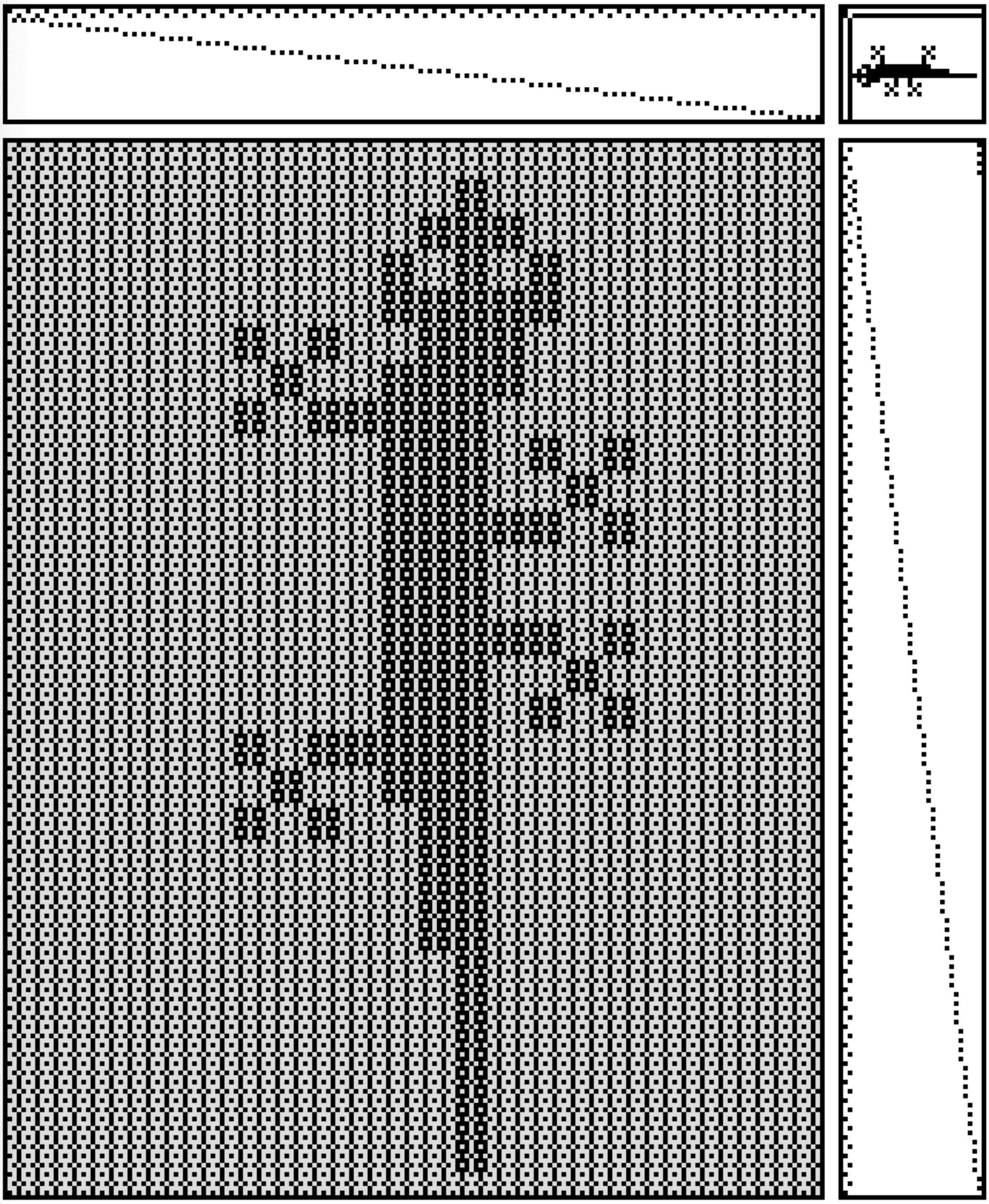
$T = M \circ A^{-1} \circ R$

Si l'on effectue une symétrie/verticale simultanément sur l'attachage et sur la marchure, le tissu reste inchangé.



M o -I est le symétrique de M par rapport à la verticale.
A o -I est le symétrique de A par rapport à la verticale.
$T' = (M \text{ o } -I) \text{ o } (A \text{ o } -I)^{-1} \text{ o } R$
$T' = (M \text{ o } -I) \text{ o } (-I)^{-1} \text{ o } A^{-1} \text{ o } R$
$T' = M \text{ o } -I \text{ o } -I \text{ o } A^{-1} \text{ o } R$
$T' = M \text{ o } I \text{ o } A^{-1} \text{ o } R$
$T' = M \text{ o } A^{-1} \text{ o } R$
$T' = T$

Si l'on effectue une symétrie/horizontale simultanément sur l'attachage et sur le rentrage, le tissu reste inchangé.



-I o R est le symétrique de R par rapport à l'horizontale.
-I o A est le symétrique de A par rapport à l'horizontale.

$T' = M \circ (-I \circ A)^{-1} \circ (-I \circ R)$

$T' = M \circ A^{-1} \circ (-I)^{-1} \circ (-I \circ R)$

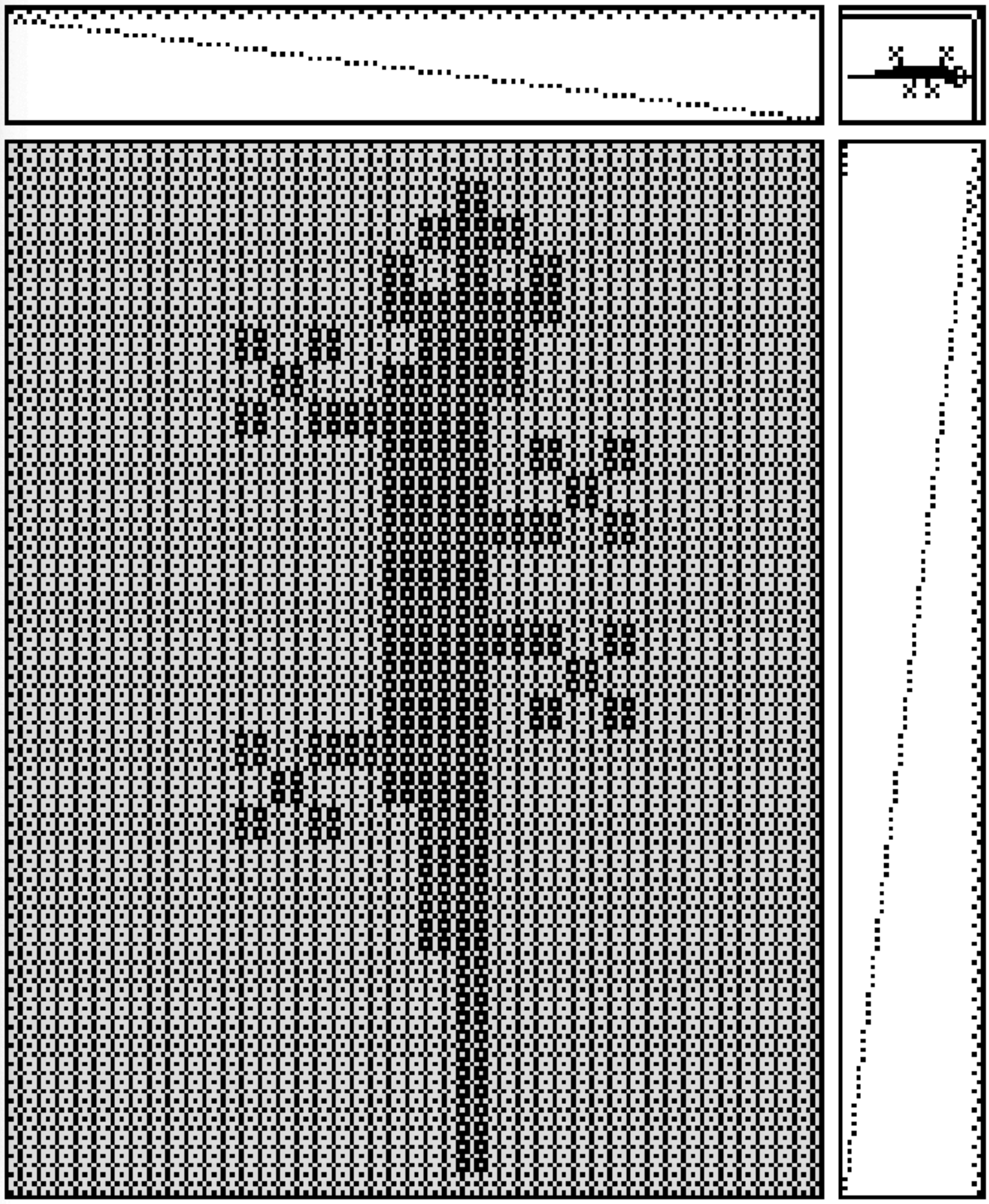
$T' = M \circ A^{-1} \circ -I \circ -I \circ R$

$T' = M \circ A^{-1} \circ I \circ R$

$T' = M \circ A^{-1} \circ R$

$T' = T$

Si l'on effectue simultanément une symétrie/horizontale sur le rentrage, une symétrie/verticale sur la marchure et une rotation de 180° sur l'attachage, le tissu reste inchangé.



M o -I est le symétrique de M par rapport à la verticale.
-I o R est le symétrique de R par rapport à l'horizontale.
-I o A o -I est la rotation de A de 180°.

$T' = (M \circ -I) \circ (-I \circ A \circ -I)^{-1} \circ (-I \circ R)$

$T' = (M \circ -I) \circ (-I)^{-1} \circ A^{-1} \circ (-I)^{-1} \circ (-I \circ R)$

$T' = M \circ -I \circ -I \circ A^{-1} \circ -I \circ -I \circ R$

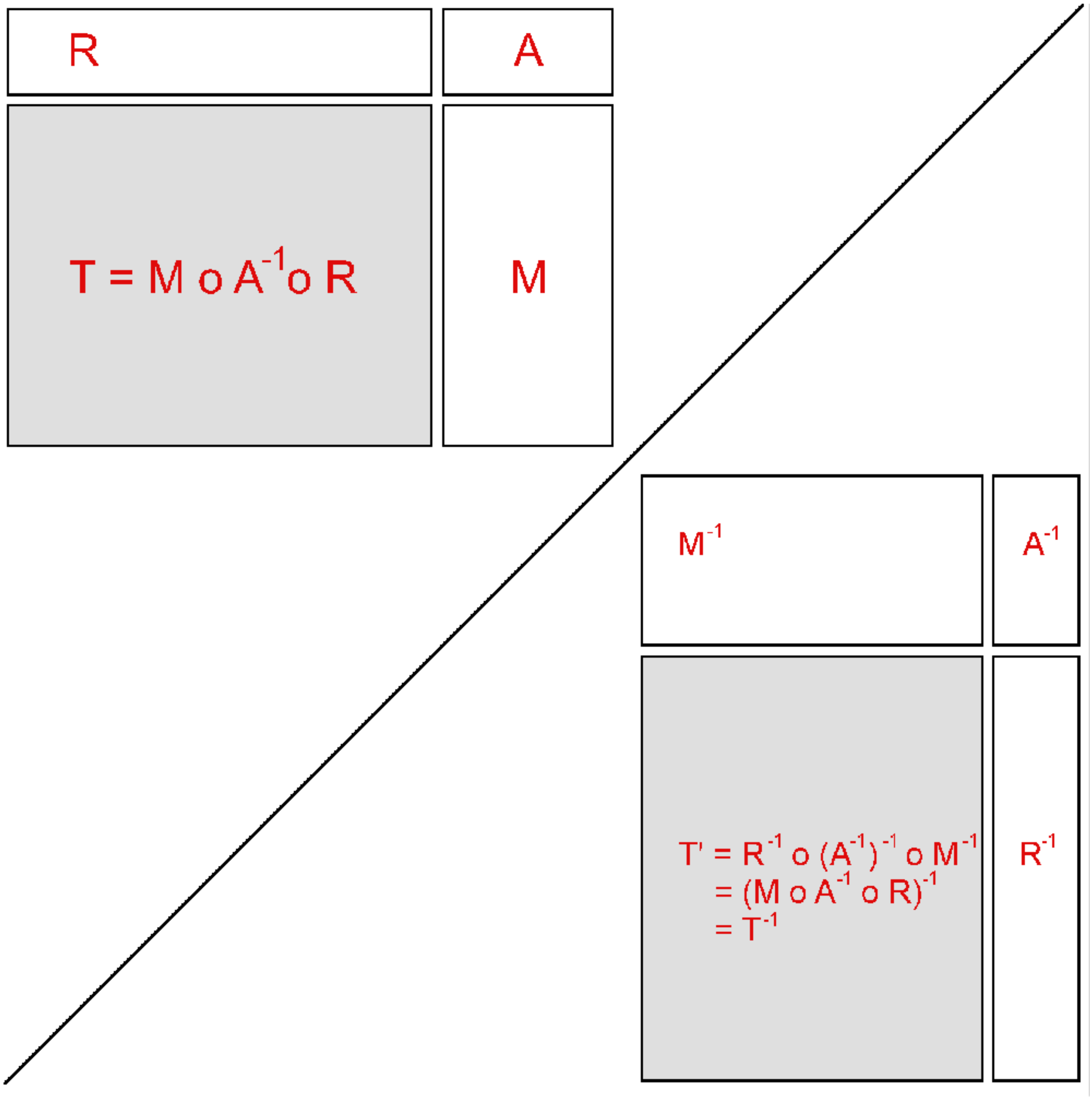
$T' = M \circ I \circ A^{-1} \circ I \circ R$

$T' = M \circ A^{-1} \circ R$

$T' = T$

De nombreuses autres transformations du tissu sont possibles. En particulier les résultats déjà obtenus, ceux qui ne faisaient pas intervenir l'attachage, sont toujours valables. Avec un attachage carré de nouvelles possibilités de transformation apparaissent. La formule du tissu et le calcul sur la composition des relations doivent maintenant vous permettre d'analyser simplement n'importe quelle situation.

Lorsqu'une marchure a la propriété d'un rentrage renversé, c.-à-d. lorsqu'il est injectif (une croix et une seule par ligne), il peut être intéressant de renverser complètement le tissu $T = M \circ A^{-1} \circ R$, en remplaçant le rentrage par la réciproque de la marchure, la marchure par la réciproque du rentrage et l'attachage par sa réciproque.

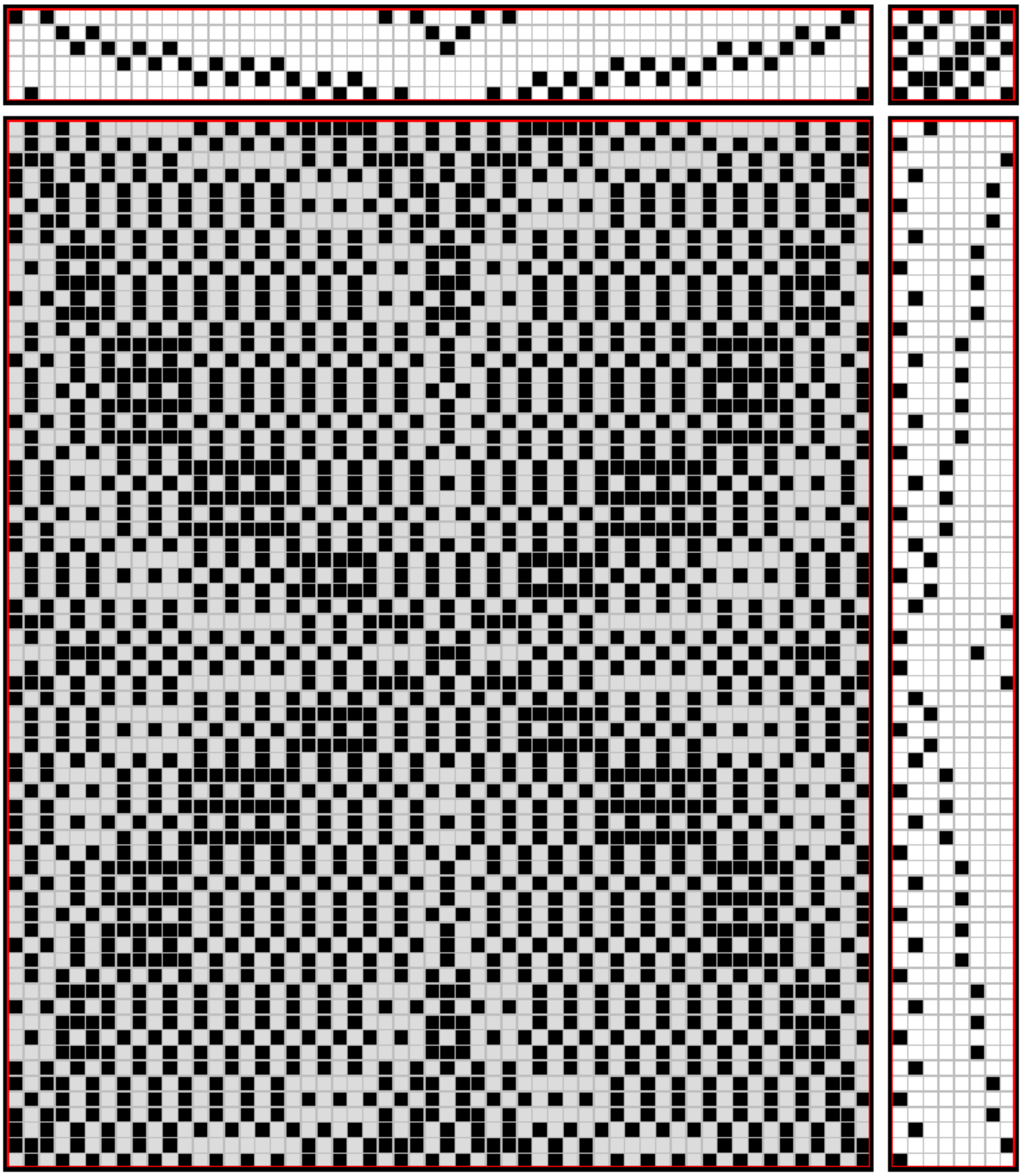


Le nouveau tissu obtenu T'est la réciproque du tissu T, soit T^{-1} :

$$T' = R^{-1} \circ (A^{-1})^{-1} \circ M^{-1} = (M \circ A^{-1} \circ R)^{-1} = T^{-1}$$

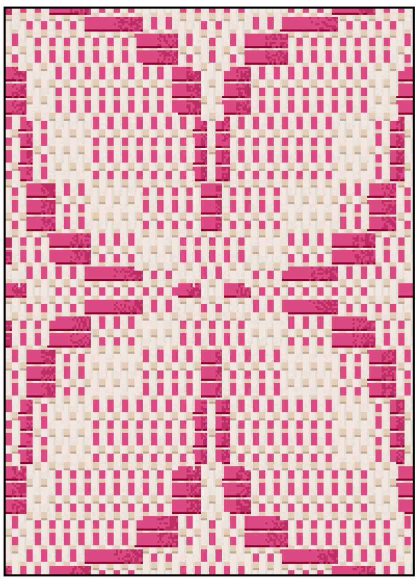
Prêtez-vous à cette expérience troublante : prenez une feuille de papier, sur laquelle est dessiné un tissu, par le coin haut droit et par le coin bas-gauche. Faites pivoter la feuille et observez le nouveau tissu par transparence...

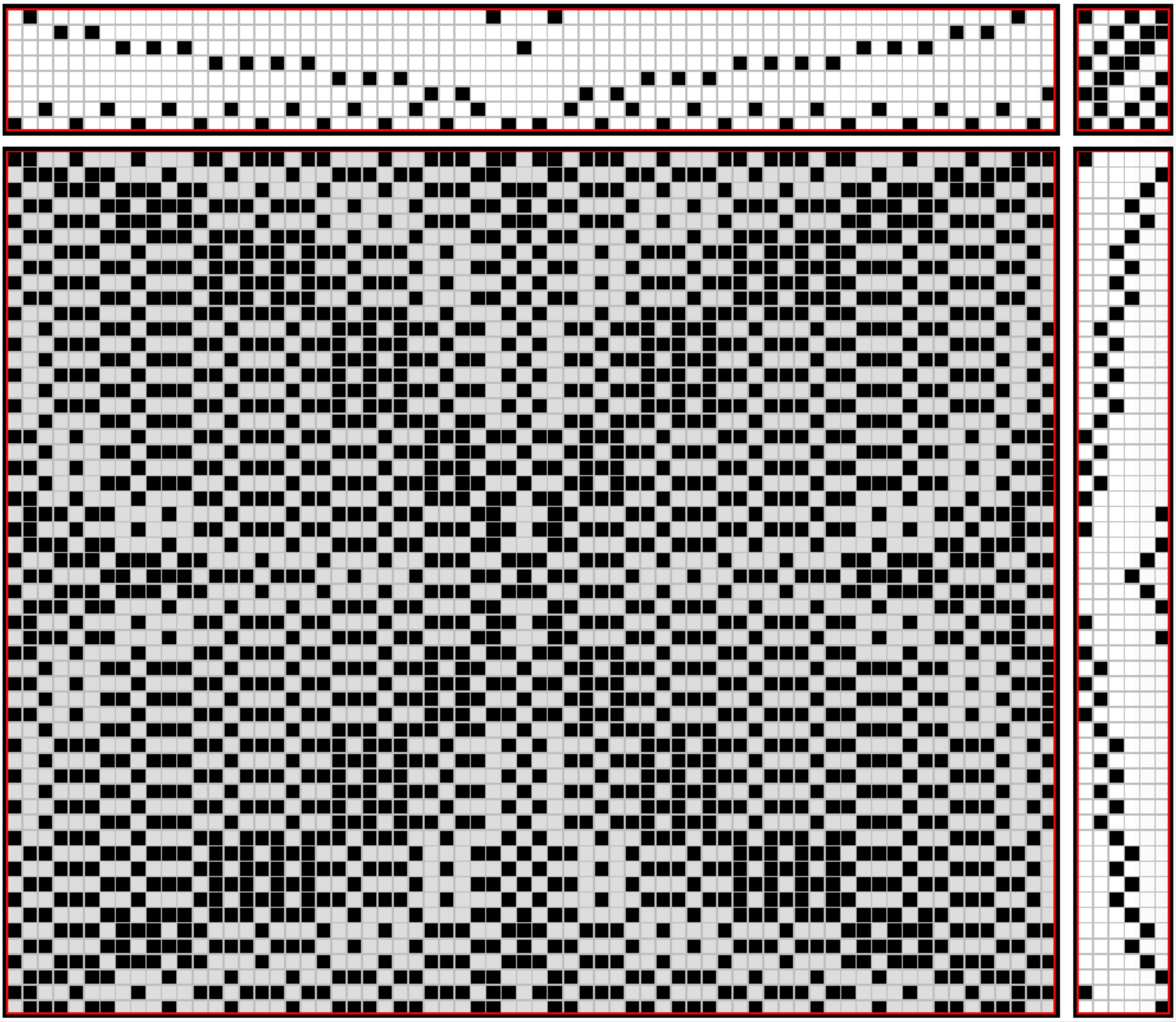
Prenons l'exemple d'un tissu contexturé (Les armures utilisées sont décrites troisième partie, méthode des blocs).



$T = M \circ A^{-1} \circ R$

Ce tissu traditionnel, du type "frappé" ou "toile lancée", est tissé sur 6 cadres et 8 marches. Deux trames sont utilisées : une fine de la même couleur que la chaîne, pour le liage toile, et une plus épaisse, d'une couleur différente, pour le motif. L'armure est représentée, en gros en haut à gauche, en bas à droite est figuré le tissu avec ses couleurs. L'inconvénient majeur de ce tissu est qu'il nécessite l'utilisation de deux navettes ; le tissage en est d'autant ralenti. De plus son duitage est élevé. Si l'on renverse le diagramme du tissu, nous aurons un rentrage sur 8 cadres à deux chaînes et une marchure à une seule sorte de trame. Ce tissu aura le même aspect que le précédent, il a deux cadres de plus, mais est nettement plus rapide à tisser. De plus son duitage est moins élevé.





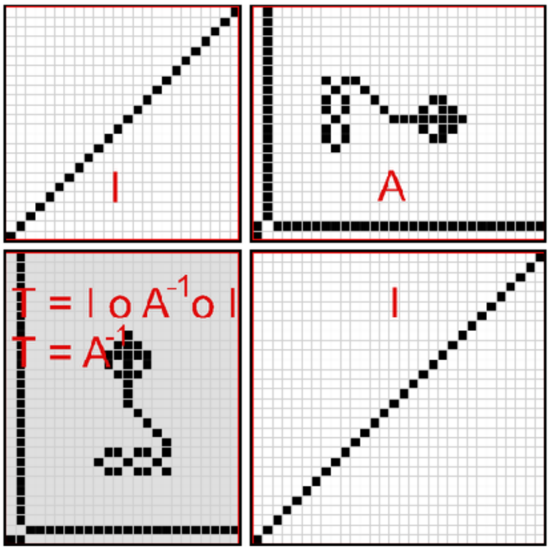
$T' = R^{-1} \circ (A^{-1})^{-1} \circ M^{-1} = (M \circ A^{-1} \circ R)^{-1} = T^{-1}$

La structure du nouveau rentrage est du type "corps de liage plus corps de décor" ; c'est un rentrage "été-hiver". Cette expérience renversante vous a peut être permis de prendre conscience qu'avec un rentrage de type "été-hiver" on peut également tisser une toile lancée effet chaîne.

Remarque :
T^{-1} n'est pas exactement le tissu T dont on a échangé la chaîne et de la trame.
Il y a bien échange des lignes et des colonnes. Pourtant une ligne blanche de T, c'est-à-dire un flotté trame de T, se transforme en une ligne blanche de T^{-1} , qui n'est pas un flotté chaîne de T^{-1} mais un flotté chaîne envers. De la même manière un flotté chaîne de T se transforme en flotté trame envers de T^{-1}.
Le tissu T dont on a échangé la chaîne et de la trame est l'envers du tissu T^{-1} .

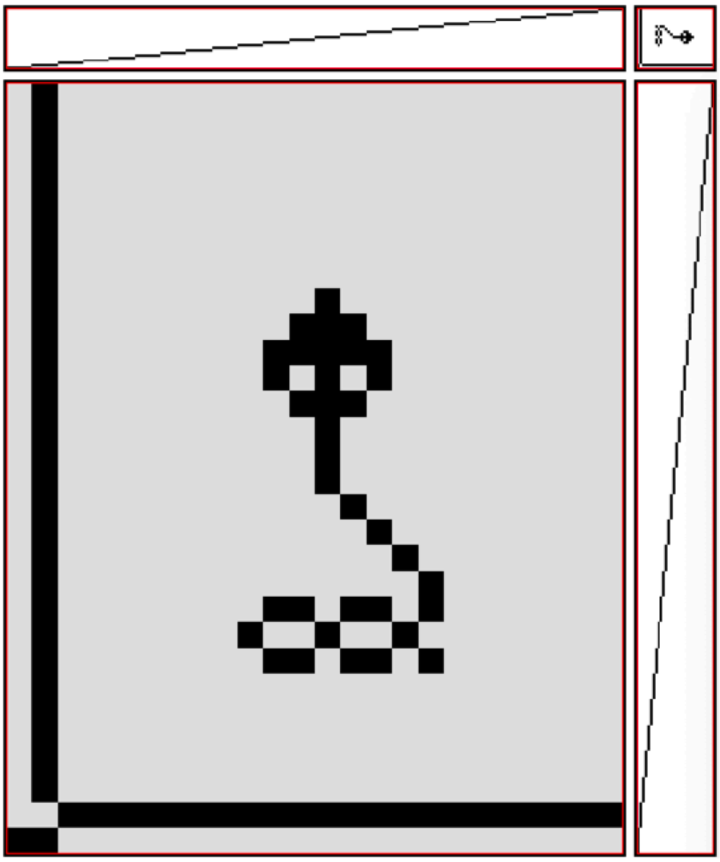
chapitre 4
Zoom sur l'attachage

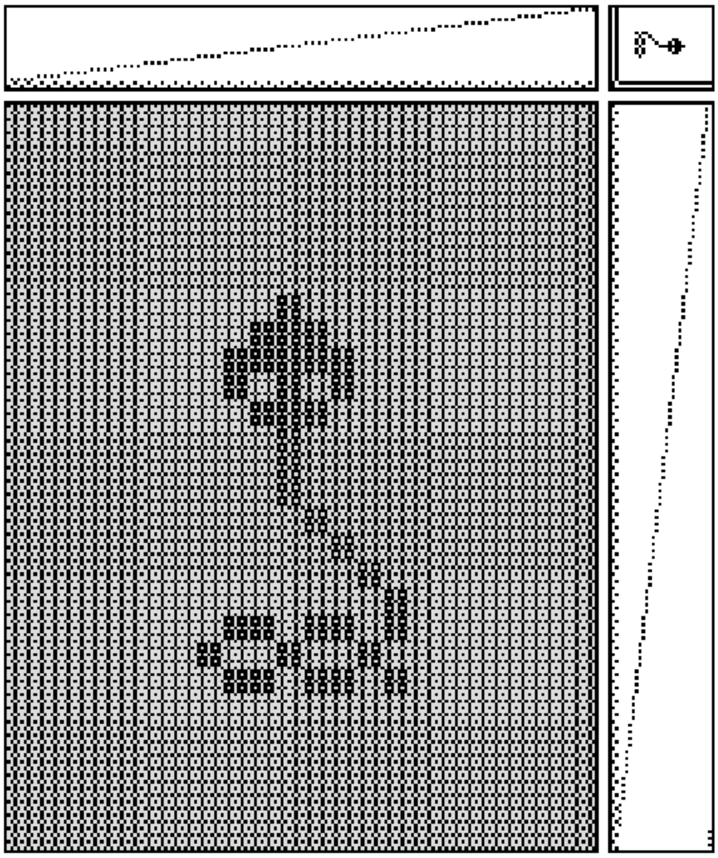
Imaginons un tissu où toute l'information serait concentrée dans l'attachage, le rentrage et la marchure étant suivies.



T = I o A^{-1} o I   T = A^{-1}

Le tissu T est alors exactement égal à la réciproque de l'attachage A^{-1}.





Si nous étirons la diagonale I dans un rentrage et une marchure rectangulaires, le tissu sera étiré d'autant et présentera un agrandissement renversé de l'attachage.
Une fois l'agrandissement de la forme obtenue, on passera à la mise en contexture. Ce type d'agrandissement conserve la définition du dessin de l'attachage et le tissu agrandi présentera toujours un contour en escalier.

tissu engendré

Quelle est la démarche du créateur textile ? Il part d'une idée graphique, d'une courbe ou d'une surface, puis cherche à construire un rentrage et un carton susceptible de produire au tissu le dessin souhaité.
Que fait l'ordinateur ? Tout le contraire ! Il calcule le tissu en fonction des informations contenues dans le carton et dans le rentrage.
Pourquoi ne pas retourner la situation en notre faveur ?
Le calcul du tissu dans la représentation du type "carton-rentrage" s'exprime par la formule $T = C \circ R$. Transformons-la de manière à ce que le tissu n'apparaisse plus comme un résultat mais comme une composante du calcul.
En multipliant à gauche et à droite par R^{-1} on a :

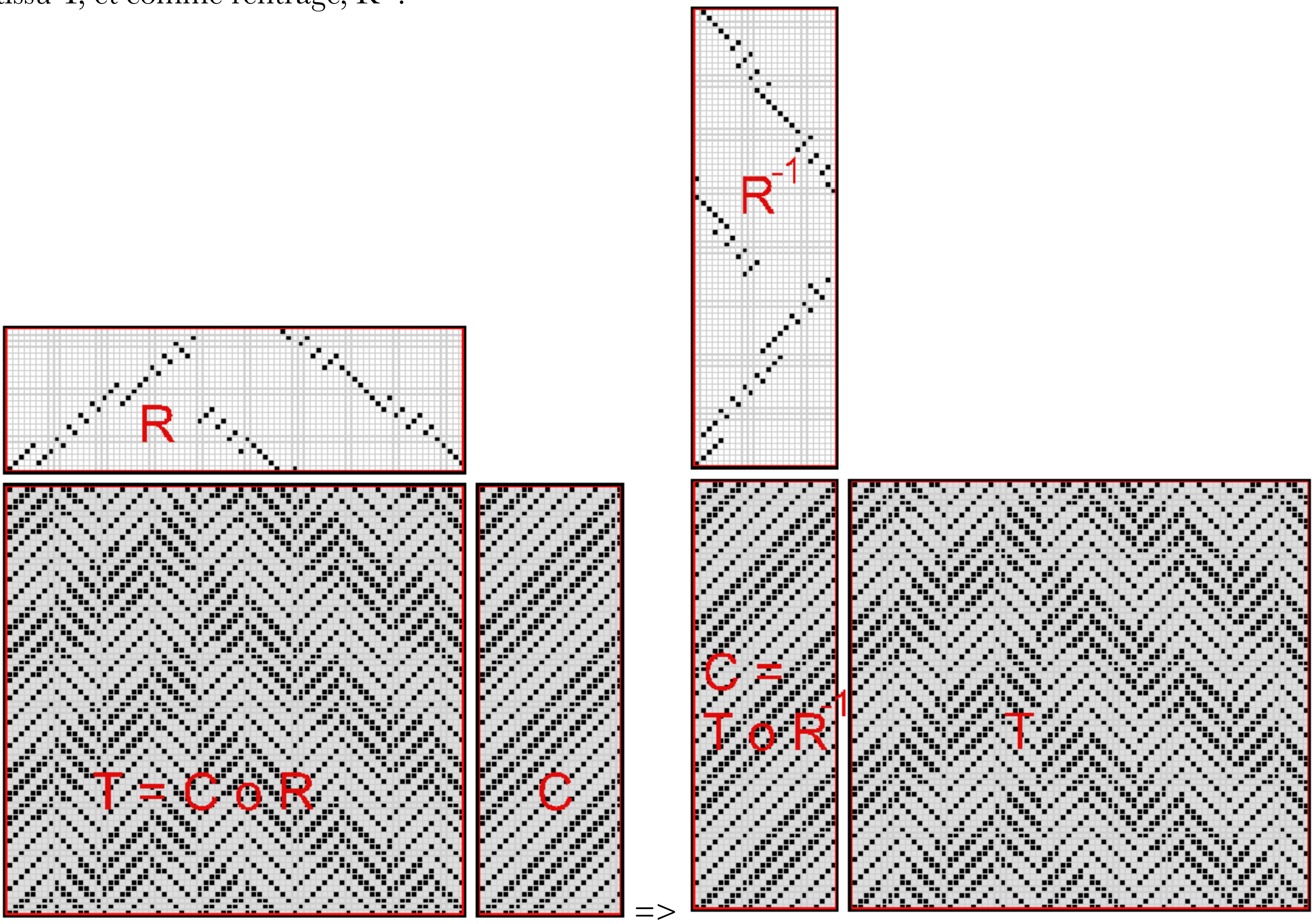
$$T = C \circ R \quad \Rightarrow \quad T \circ R^{-1} = C \circ R \circ R^{-1}$$

R est un rentrage, donc une application, et dans ce cas $R \circ R^{-1} = I$. On a donc :

$$T = C \circ R \quad \Rightarrow \quad T \circ R^{-1} = C \circ I$$

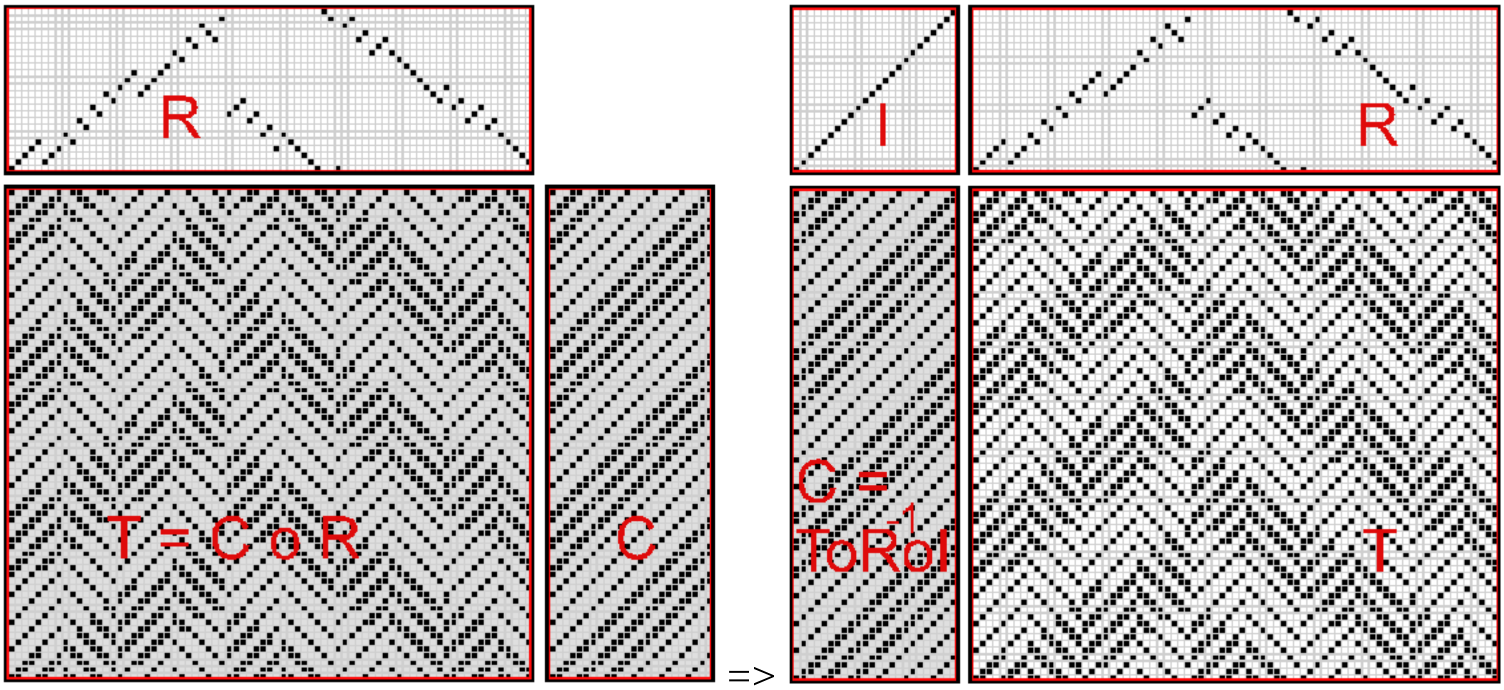
$$T = C \circ R \quad \Rightarrow \quad T \circ R^{-1} = C$$

La formule $C = T \circ R^{-1}$ indique que le carton C est le tissu que l'on obtient avec comme carton, le tissu T, et comme rentrage, R^{-1}.



$T = C \circ R \quad \Rightarrow \quad T \circ R^{-1} = C$

Le tissu $C = T \circ R^{-1}$ peut également s'écrire $C = T \circ R^{-1} \circ I$, faisant apparaître T comme marchure, R comme attachage et I comme rentrage :



$T = C \circ R$ => $C = T \circ R^{-1} \circ I$

Cette implication signifie que pour tout tissu du type "carton-rentrage", le carton est le résultat du calcul du tissu ayant : le rentrage initial comme attachage et le tissu initial comme marchure.

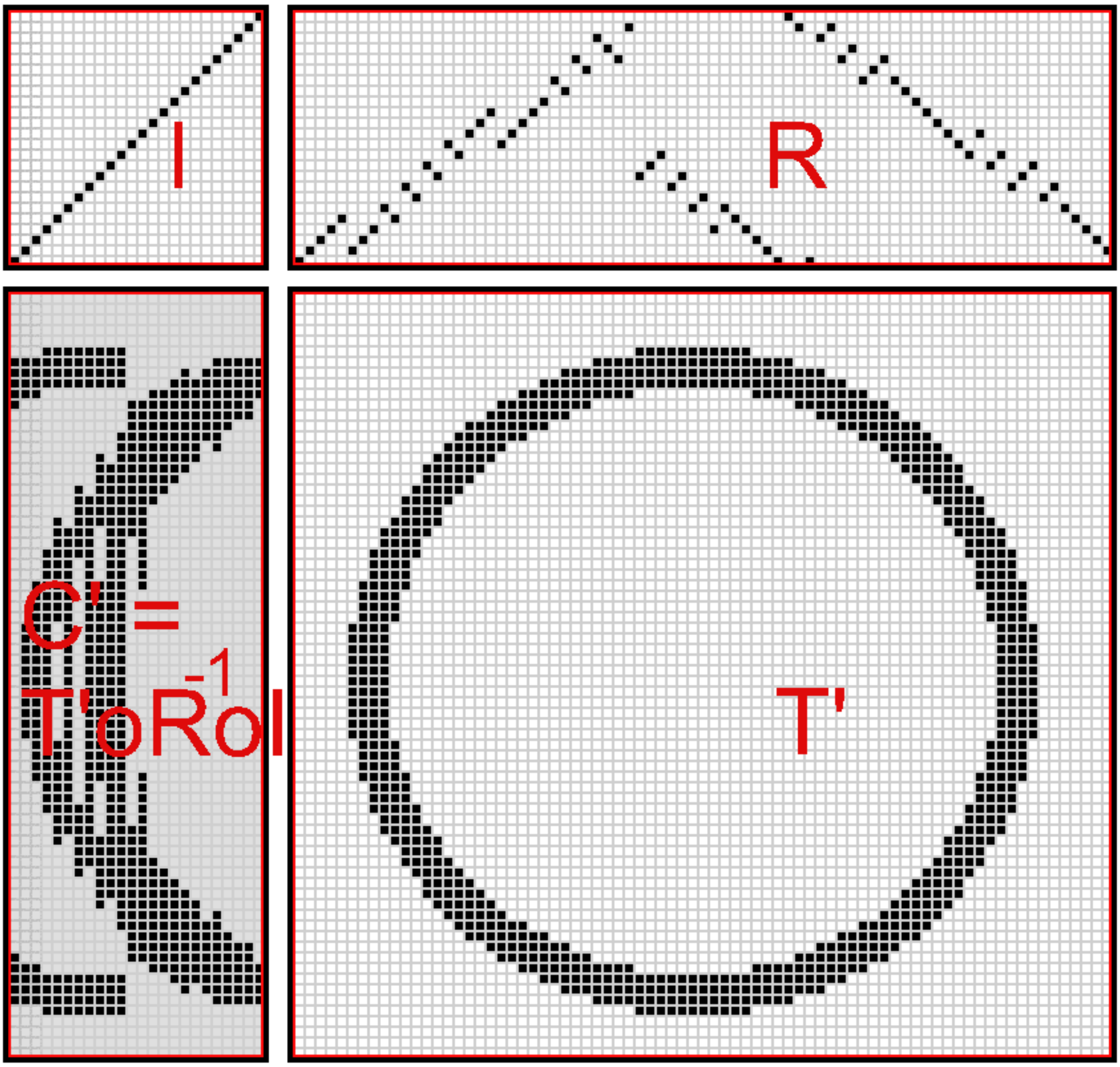
La partie semble gagnée ; le tissu est un élément du calcul, il commande le carton.
En dessinant un autre graphisme dans cette "marchure tissu", pourquoi n'obtiendrions nous pas le carton correspondant, par le calcul de ce diagramme de tissu qui renverse les rôles ? Cela reviendrait à utiliser l'implication, qui nous a permis de passer d'un diagramme à l'autre, dans l'autre sens.

Nous avions l'implication :

$T = C \circ R$ => $T \circ R^{-1} = C$

Examinons sa réciproque :

Supposons que nous partions du calcul de tissu $C' = T' \circ R^{-1} \circ I$ où T' est la "marchure" dans laquelle nous avons dessiné un nouveau graphisme (un cercle), où R est l'attachage et où C' est le résultat "tissu" du calcul.



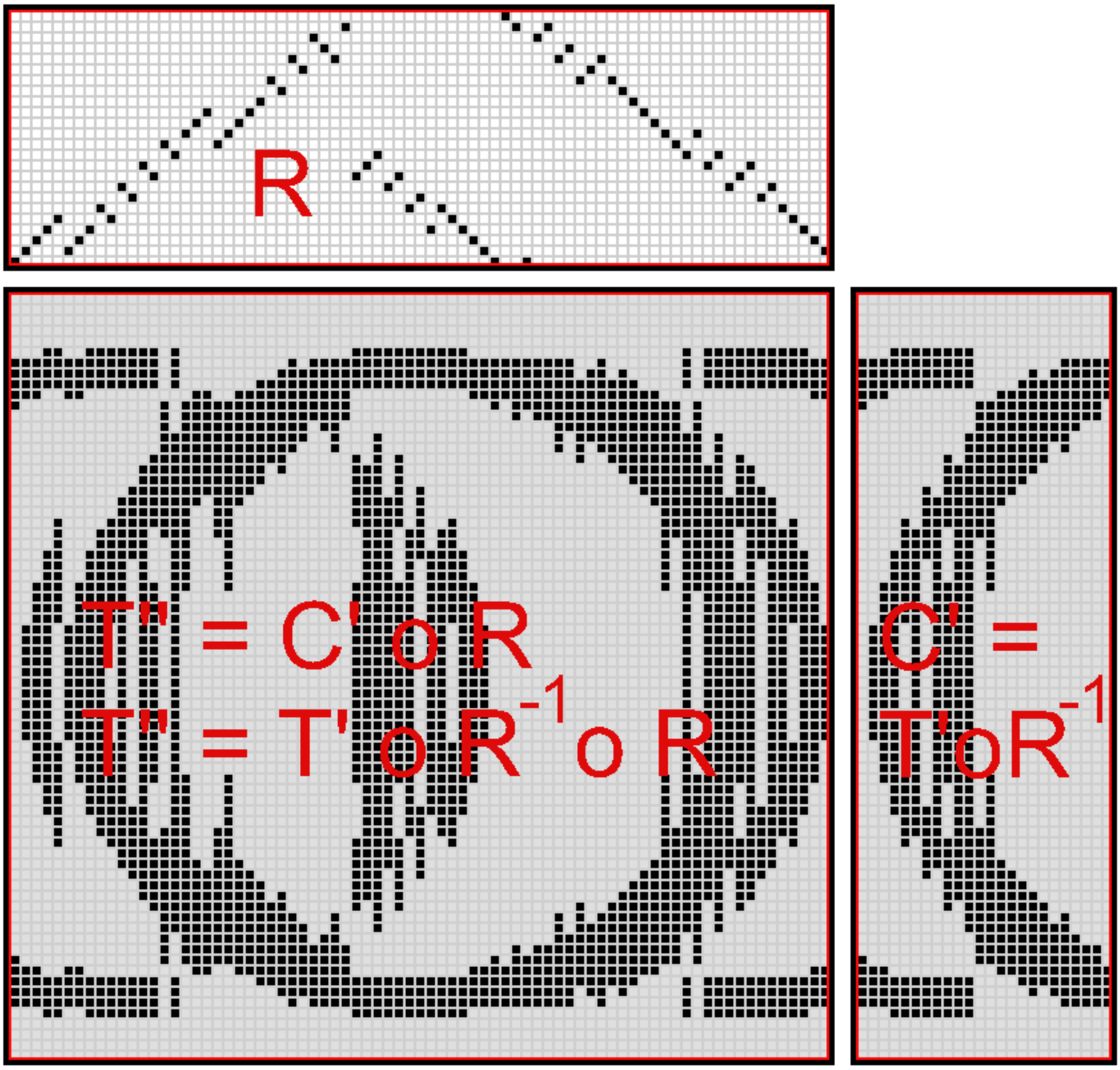
$C' = T' \circ R^{-1} \circ I$

Considérons le nouveau tissu T'' = C' o R que l'on obtient par le calcul du diagramme classique avec R comme rentrage et C', le carton déduit de T' comme carton. Le tissu T'' = C' o R est-il égal à T' ?

Multiplions de chaque côté de l'égalité $T' \circ R^{-1} = C'$ par R :

$$T' \circ R^{-1} = C' \quad \Rightarrow \quad T' \circ R^{-1} \circ R = C' \circ R = T''$$

Nous savons que $R^{-1} \circ R$ est égal à I dans le cas où R est injectif. R étant un rentrage, c'est une application. R n'est pas en général injectif.
L'implication réciproque est donc en général fausse, le tissu C' o R , c.-à-d. $T' \circ R^{-1} \circ R$ n'est pas en général égal à T' .

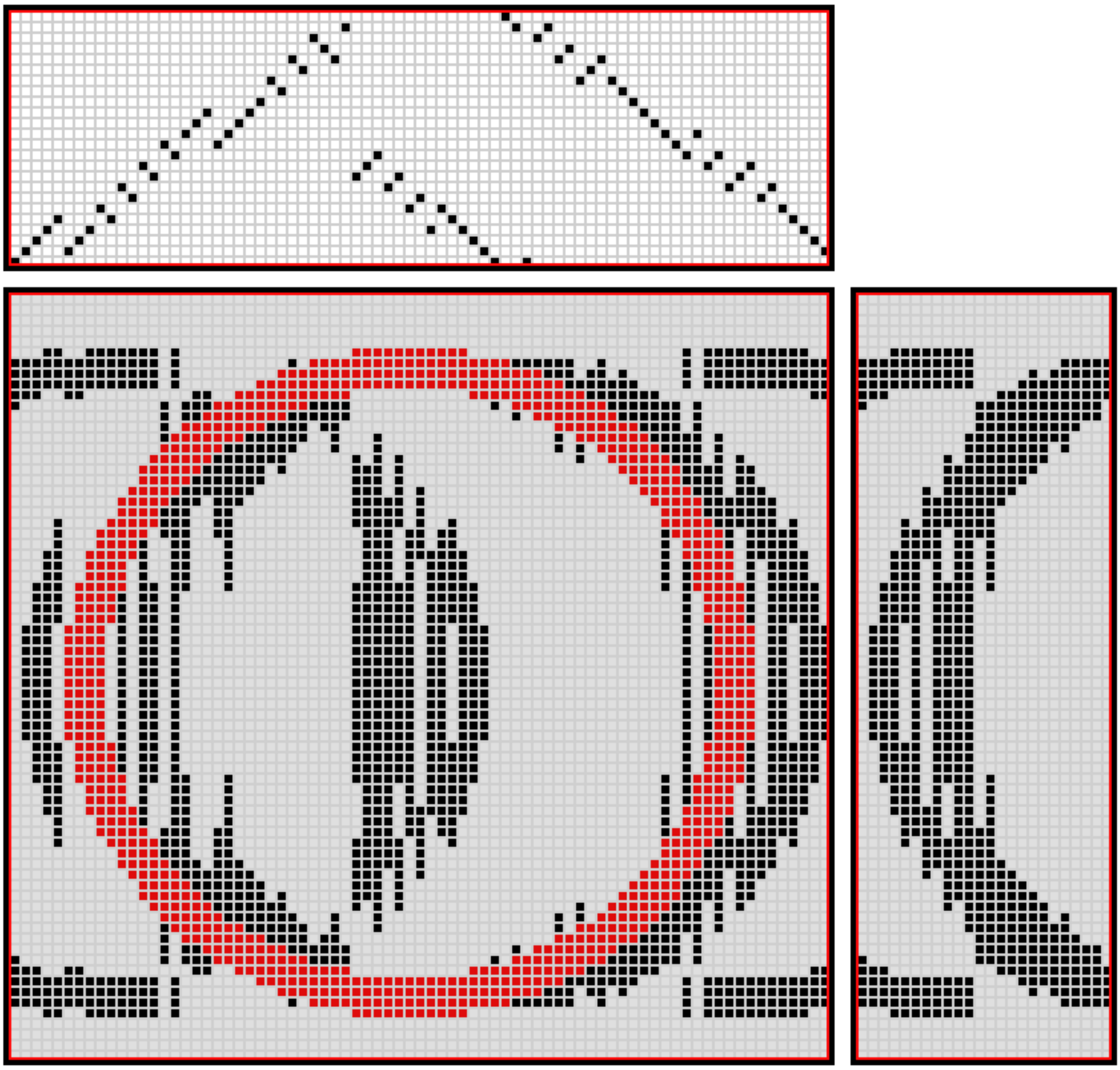


T'' = T' o R^{-1} o R n'est pas en général égal à T' .

Cependant, même si R n'est pas injectif, nous avons montré que R^{-1} o R contenait toujours la diagonale I. On peut donc écrire :

$$I \subset (R^{-1} \circ R) \quad \Rightarrow \quad T' \circ I \subset T' \circ (R^{-1} \circ R)$$
$$I \subset (R^{-1} \circ R) \quad \Rightarrow \quad T' \subset (T' \circ R^{-1}) \circ R$$
$$I \subset (R^{-1} \circ R) \quad \Rightarrow \quad T' \subset C' \circ R$$
$$I \subset (R^{-1} \circ R) \quad \Rightarrow \quad T' \subset T''$$

Le nouveau tissu T'' = C' o R contiendra donc toujours T'. Le graphisme que nous avions dessiné dans T' (le cercle) sera donc bien présent intégralement dans le tissu T'' = C' o R , mais d'autres points, dus aux répétitions d'enfilage sur un même cadre dans le rentrage (au fait que R n'est pas injectif), s'y surajouteront. Nous dirons que le tissu T'' = C' o R a été engendré par T' , et nous appellerons le carton C' calculé en fonction de T', le carton engendré par T' . Si cette analyse abstraite vous parait compliquée, rassurez-vous le calcul d'un tissu engendré est très simple en pratique ; "Pointcarré"" se charge de tous les calculs !

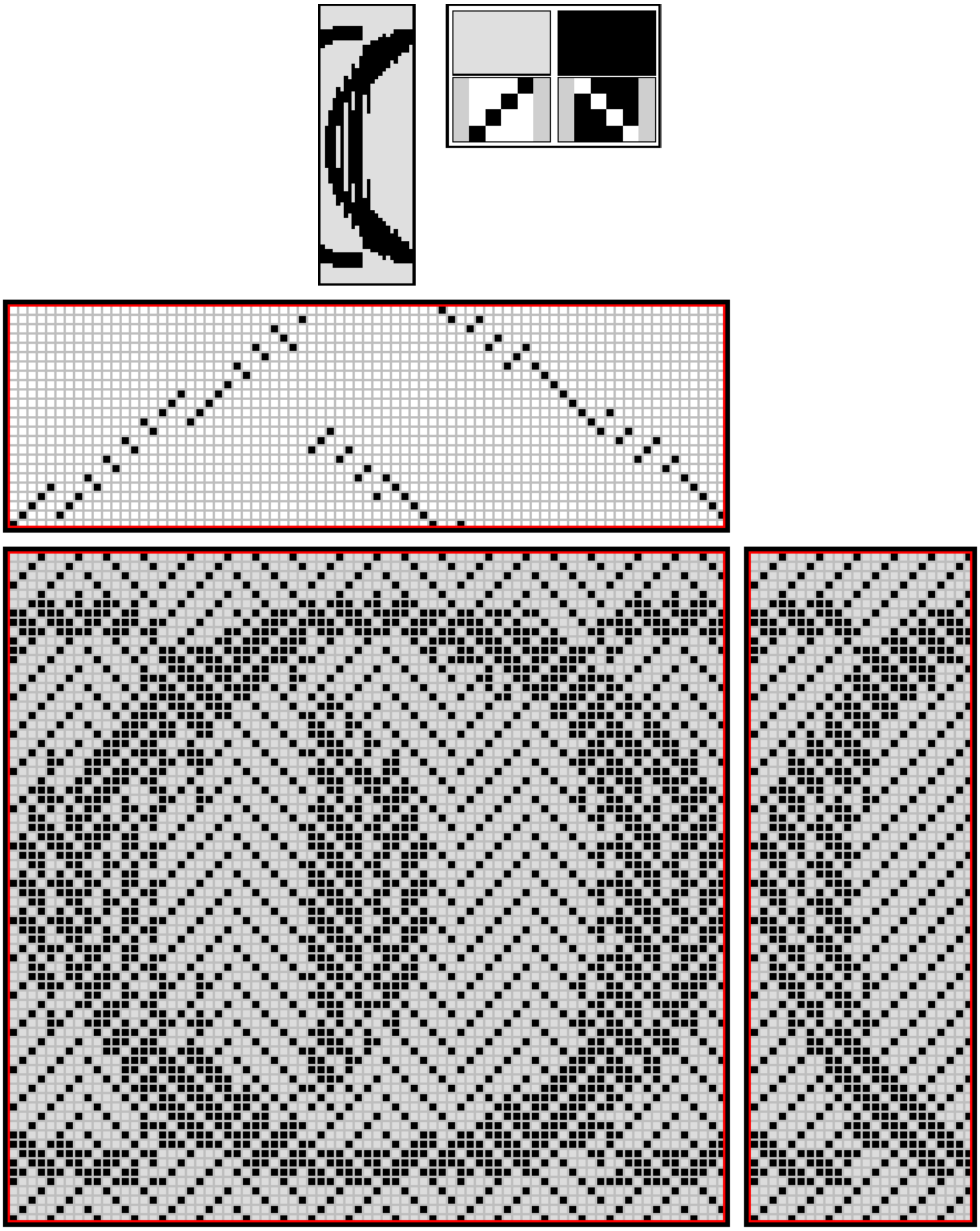


T' ⊂ T''
Le tissu engendré T'' contient le cercle en rouge T'
plus des levés engendrés par T' sur le rentrage R

Pointcarré vous permet de dessiner directement dans le diagramme de tissu dans la représentation T = C o R.
Vous pouvez même glisser-déposer le cercle sur le diagramme de tissu.
Le carton engendré est alors calculé automatiquement, puis le tissu T est recalculé à partir de ce nouveau carton. Le tissu mis à jour contiendra le cercle plus les points supplémentaires qui seront levés par le carton engendré.

Cet exemple montre nettement comment les répétitions et les symétries du rentrage affectent le tissu engendré.

Les graphismes dessinés dans le diagramme de tissu n'étant pas a priori compatibles avec les contextures types du rentrage, on procédera à la mise en contexture après le calcul du carton engendré.



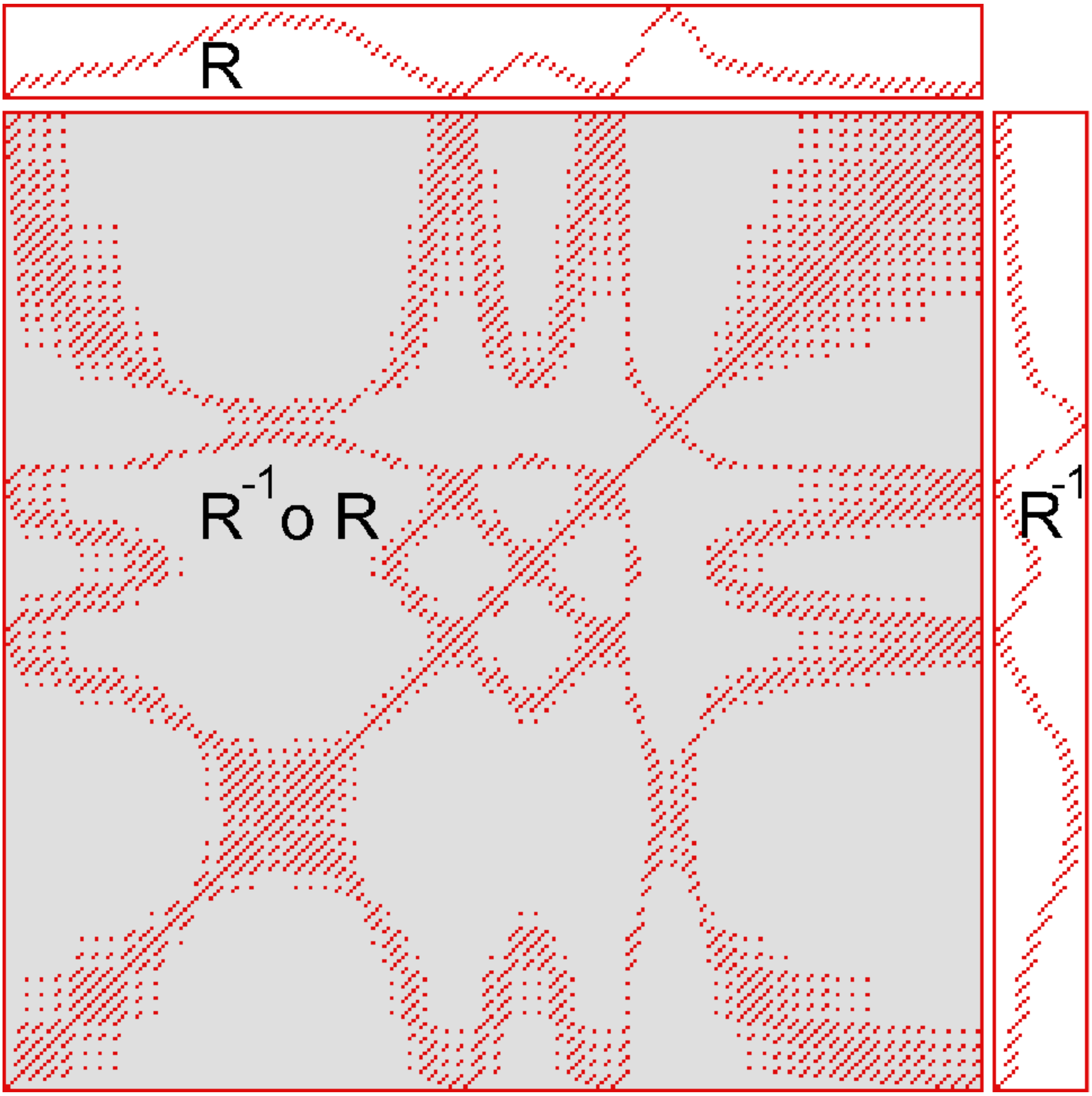
Le tissu engendré mis en contexture

Le grand intérêt de cette technique est de permettre de développer automatiquement une grande variété de graphisme sur un même rentrage. L'exemple précédent montre comment il faut tenir compte des symétries présentes dans le rentrage pour obtenir un tissu engendré proche du graphisme initial. Un mauvais positionnement du graphisme peut engendrer des parasites qui masquent le dessin initial. Par contre, en utilisant des courbes d'une grande polyvalence (par exemple un rentrage pseudo-suivi voir Méthode des initiales), on peut produire, pratiquement sans contraintes les graphismes les plus divers.

tissus symétriques par rapport à la première diagonale

1- "MARCHé COMME ENFILé". REPRéSENTATION DU TYPE "MARCHURE-ATTACHAGE-RENTRAGE"

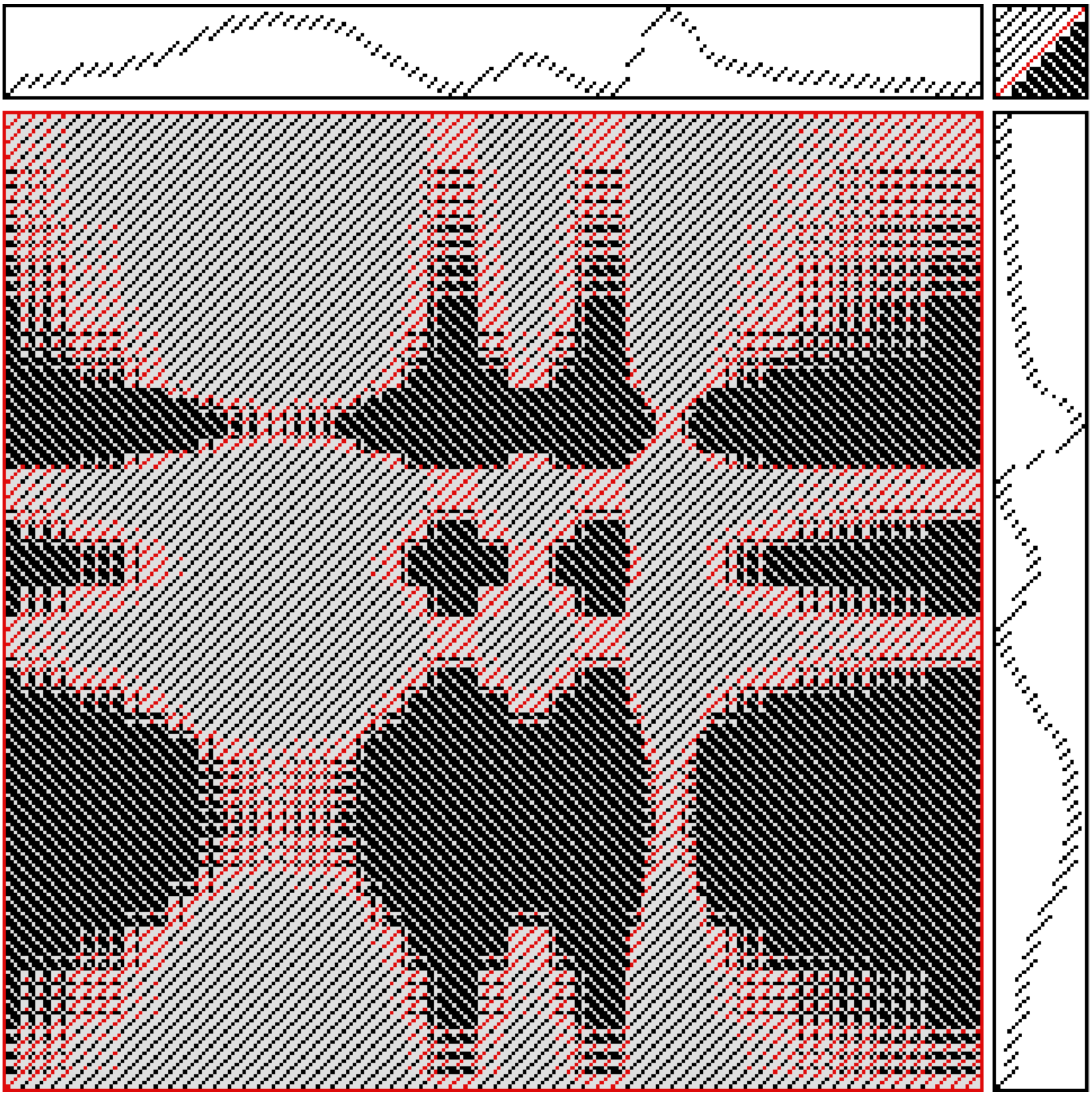
Nous nous sommes déjà intéressés au cas particulier d'un diagramme de tissu où le rentrage renversé est repris comme armure (première partie, B, chapitre 2, 9-, b)). Rappelons qu'un diagramme "marché comme enfilé" dans la représentation du type "carton-rentrage" contient la diagonale I et est symétrique par rapport à elle.



Axiale de remettage R^{-1} o R

Poursuivons cette étude avec les diagrammes du type "marchure-attachage-rentrage".

Si l'attachage A contient I , c.-à-d. si c'est un attachage suivi plus "quelque chose", il est clair que le tissu R^{-1} o A^{-1} o R contiendra l'axiale de remettage.



L'attachage A contient I,
donc le tissu T = R^{-1} o A^{-1} o R contient l'axiale de remettage (en rouge)

Voyons à quelle condition sur A la symétrie par rapport à la première diagonale est conservée :

Dire que le tissu T = R^{-1} o A^{-1} o R est symétrique c'est dire qu'il est égal à sa réciproque T^{-1}

$T = T^{-1} \iff R^{-1} \circ A^{-1} \circ R = (R^{-1} \circ A^{-1} \circ R)^{-1}$
$T = T^{-1} \iff R^{-1} \circ A^{-1} \circ R = R^{-1} \circ (A^{-1})^{-1} \circ (R^{-1})^{-1}$
$T = T^{-1} \iff R^{-1} \circ A^{-1} \circ R = R^{-1} \circ A \circ R$

R est une application car c'est un rentrage, on peut donc simplifier par R à droite :

$T = T^{-1} \iff R^{-1} \circ A^{-1} = R^{-1} \circ A$

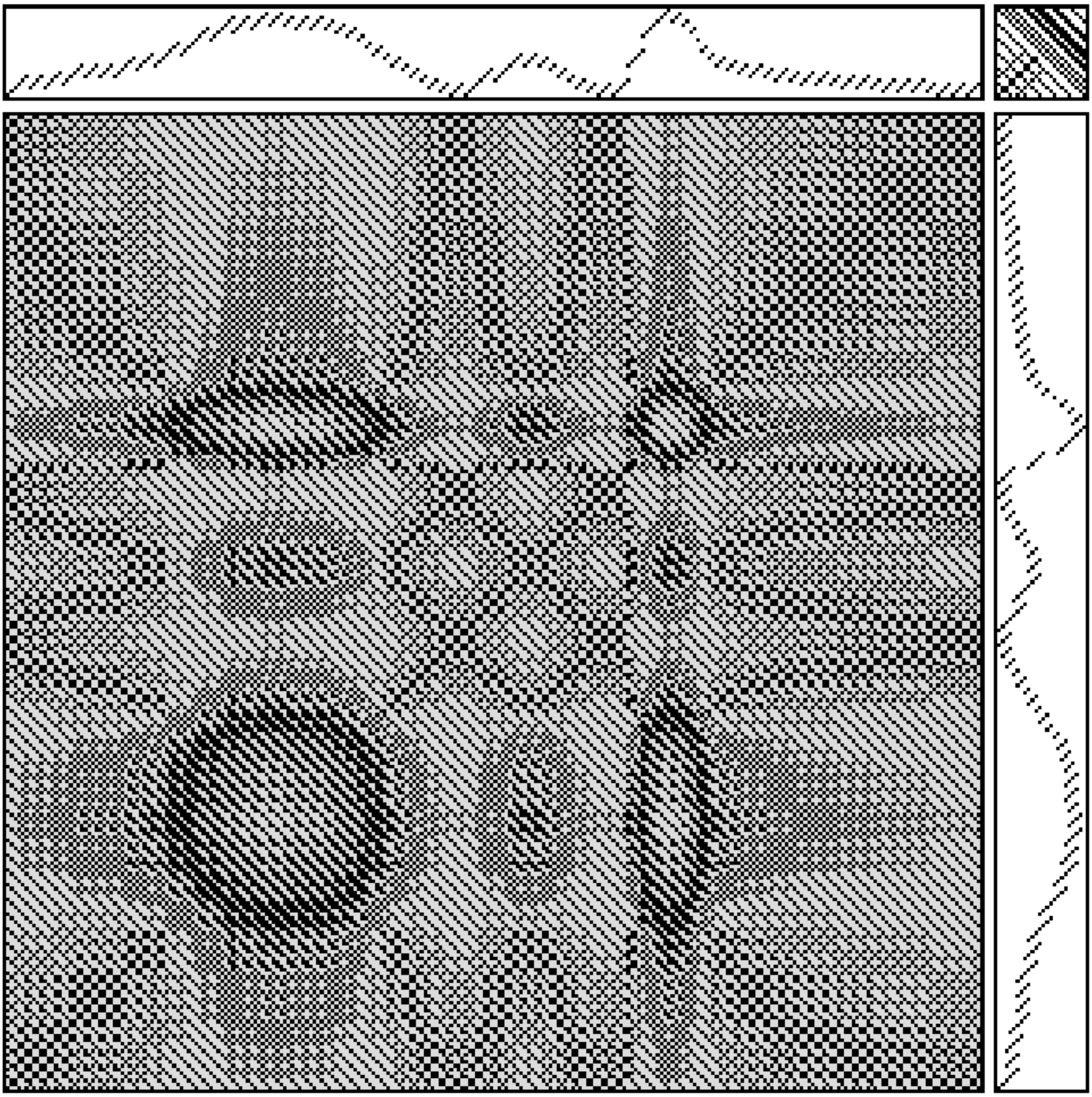
R est une application donc R^{-1} est injectif, on peut donc simplifier par R^{-1} à gauche :

$T = T^{-1} \iff A^{-1} = A$

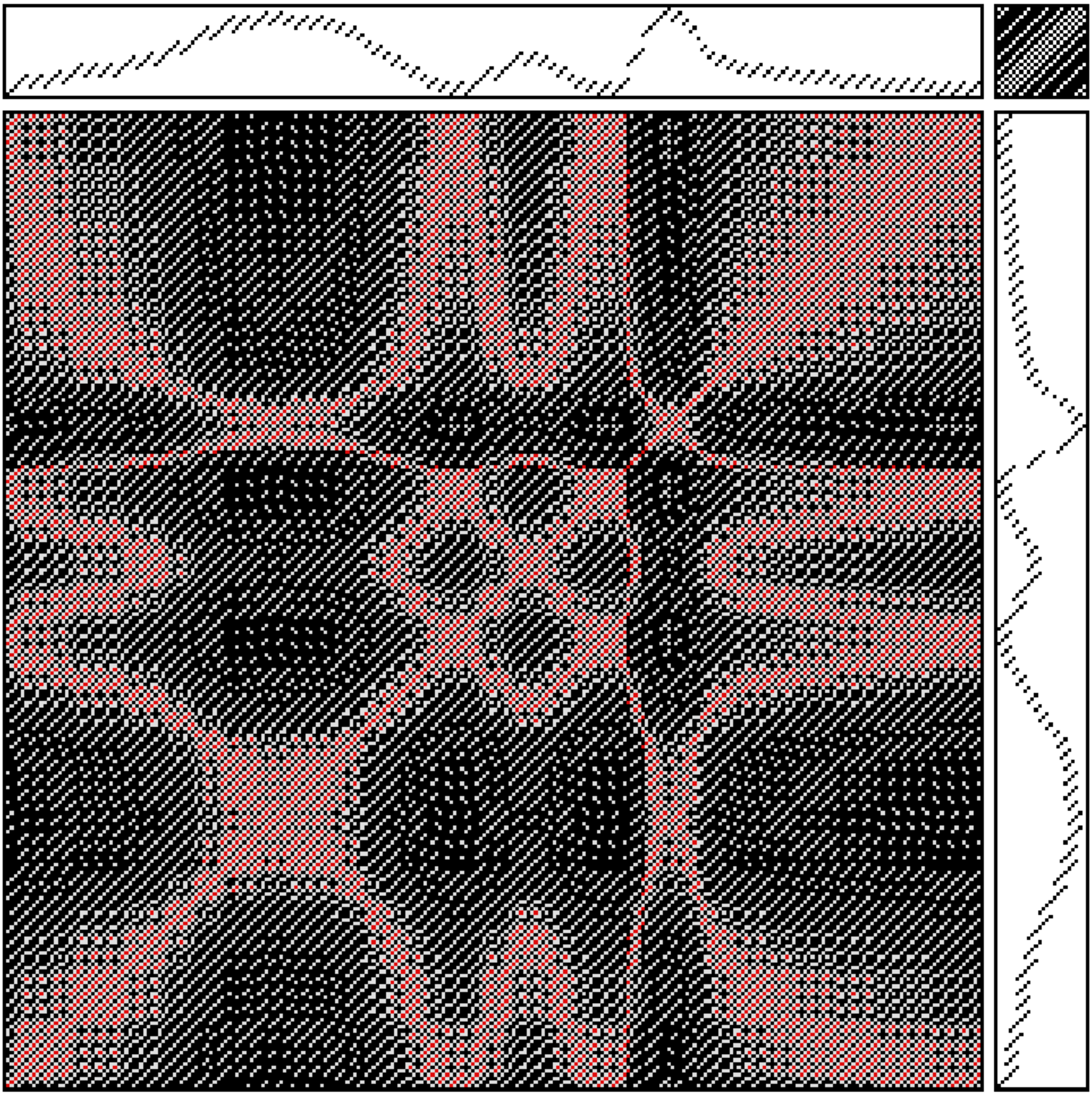
$A = A^{-1}$ signifie que A est symétrique. on peut donc énoncer :

Un diagramme "marché comme enfilé" est symétrique par rapport à la première diagonale si et seulement si son attachage est symétrique par rapport à la première diagonale.

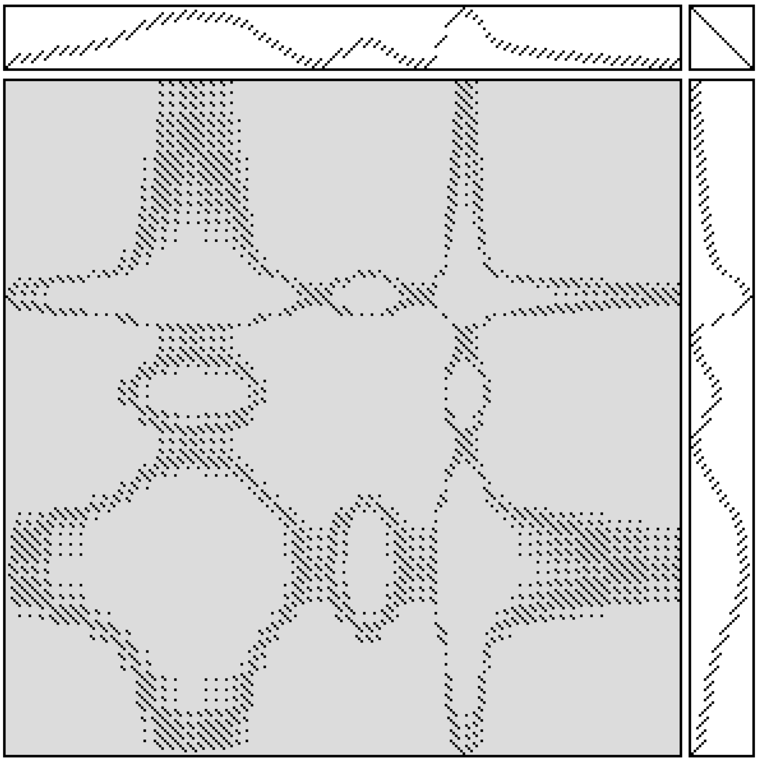
$T = R^{-1} \circ A^{-1} \circ R$ est symétrique $\iff$ A est symétrique



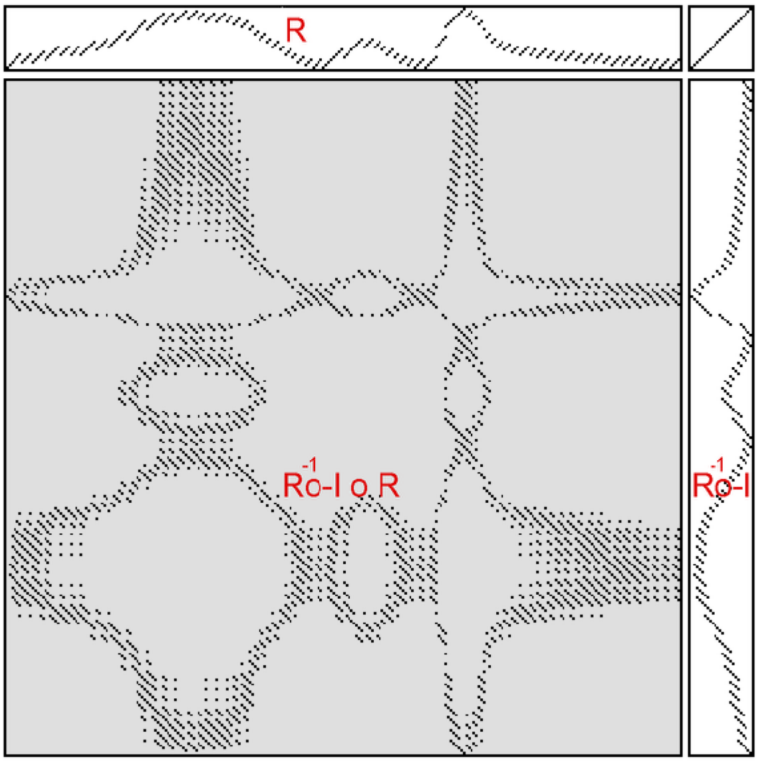
Si l'attachage est structuré autour de la diagonale I. le tissu s'organisera autour de l'axiale de remettage.



Examinons le cas particulier d'un attachage à retour :



Comme prévu le tissu est symétrique par rapport à la première diagonale car -I est symétrique. Ce diagramme est équivalent au diagramme du type "carton-attachage suivi-rentrage" suivant :



Sur un même rentrage nous avons donc à présent deux exemples de diagramme du type "carton-attachage-rentrage" produisant une courbe symétrique par rapport à la première diagonale au tissu : l'axiale de remettage R^{-1} o R et le cas précédent (R^{-1} o -I) o R . L'axiale de remettage n'est donc qu'un cas particulier et ne met pas en évidence à elle seule toutes les potentialités du rentrage. Nous allons maintenant entreprendre l'étude systématique de toutes les marchures susceptibles de produire, avec un rentrage donné, une courbe symétrique par rapport à la première diagonale au tissu.

2- CONDITION POUR QU'UN TISSU SOIT SYMéTRIQUE PAR RAPPORT à LA PREMIèRE DIAGONALE

On cherche tous les tissus symétriques ayant un rentrage donné R
T étant de la forme T = X o R

D'après ce qui précède
pour toute relation symétrique S, de la hauteur de R on a $T = R^{-1} \circ S^{-1} \circ R$ est symétrique

$T = (R^{-1} \circ S^{-1}) \circ R$ est symétrique

donc $X = R^{-1} \circ S^{-1}$ est une solution.

On cherche à montrer que toutes les solutions sont de cette forme ($R^{-1} \circ S^{-1}$ avec S symétrique), ce qui permettra de dire qu'il y a autant de tissus symétriques ayant R pour rentrage, que de symétries de la hauteur du rentrage R.

Supposons un tissu T symétrique de carton X et de rentrage R
T est de la forme T = X o R

T est symétrique <=> $T = T^{-1}$

$T = T^{-1} \iff X \circ R = (X \circ R)^{-1}$

$T = T^{-1} \iff X \circ R = R^{-1} \circ X^{-1}$

$T = T^{-1} \Rightarrow X \circ R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ X^{-1} \circ R^{-1}$

$T = T^{-1} \Rightarrow X \circ I = R^{-1} \circ X^{-1} \circ R^{-1}$ $\quad R \circ R^{-1} = I$ car R est une application

$T = T^{-1} \Rightarrow X = R^{-1} \circ (X^{-1} \circ R^{-1})$

$T = T^{-1} \Rightarrow X = R^{-1} \circ (R \circ X)^{-1}$

Si on pose S = R o X
X est de la forme $X = R^{-1} \circ S^{-1}$

Montrons que S est symétrique.

T est symétrique => $X = R^{-1} \circ (R \circ X)^{-1}$ $\quad$ d'après ci-dessus

T est symétrique => $X = R^{-1} \circ S^{-1}$

T est symétrique => $R \circ X = R \circ R^{-1} \circ S^{-1}$

T est symétrique => $R \circ X = I \circ S^{-1}$ $\quad R \circ R^{-1} = I$ car R est une application

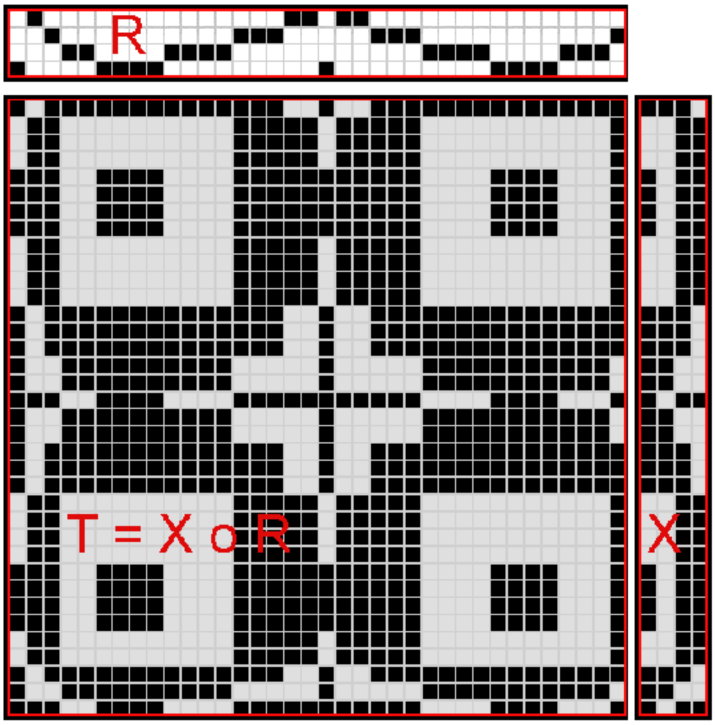
T est symétrique => $S = S^{-1}$

T est symétrique => S est symétrique

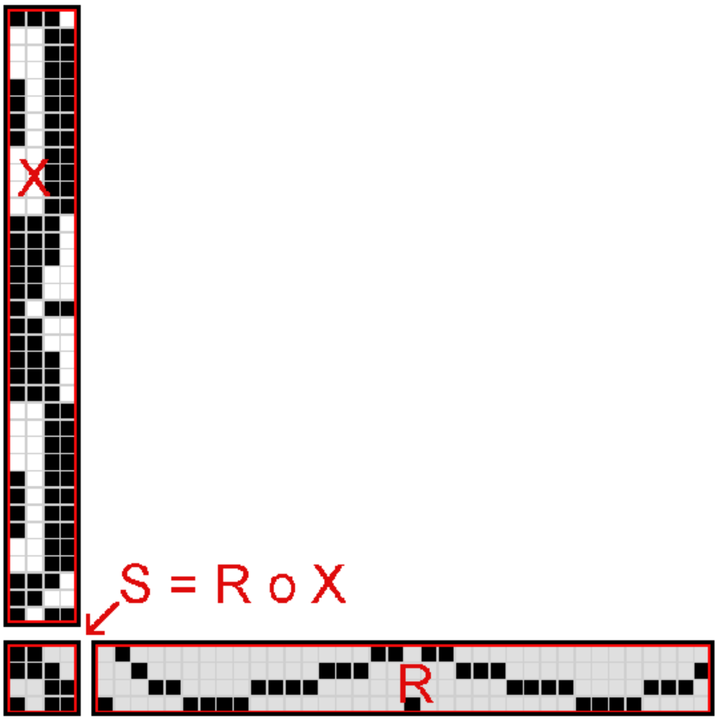
On peut donc dire que :

tous les tissus symétriques ayant un rentrage donné R, de la forme T = X o R peuvent être mis sous la forme $T = R^{-1} \circ S^{-1} \circ R$ avec S une relation symétrique telle que S = R o X.

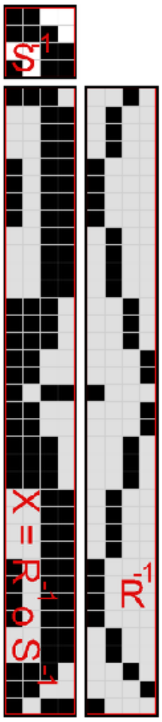
Pour trouver tous les tissus T symétriques ayant pour rentrage R, il suffit de chercher toutes les relations S symétriques de la hauteur de R ; le tissu pourra être exprimé comme un tissu "marché comme enfilé" sous la forme $T = R^{-1} \circ S^{-1} \circ R$



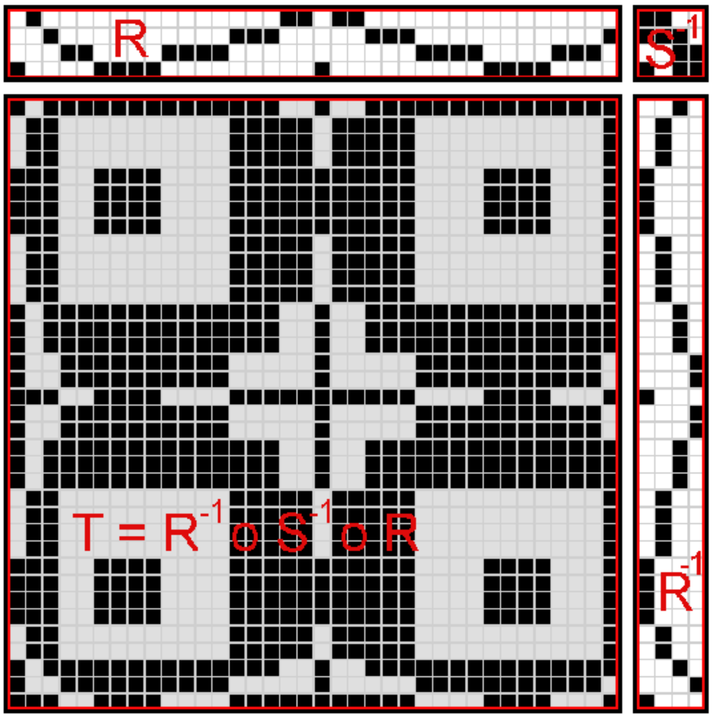
Un tissu symétrique T = X o R



Le calcul de la symétrie S = R o X



X sous la forme :
$X = R^{-1}$ o S^{-1}

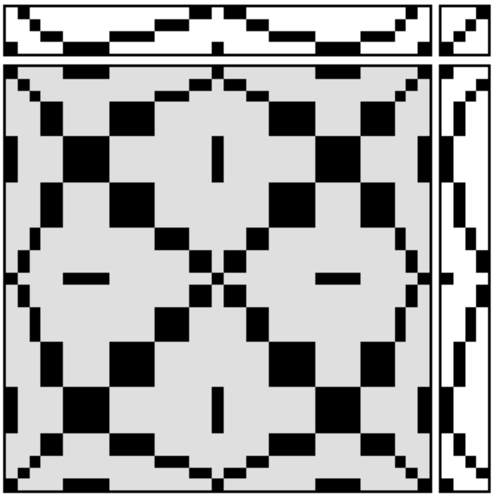


T sous la forme :
$T = R^{-1}$ o S^{-1} o R

3- CONSéQUENCES PRATIQUES

Ce résultat est particulièrement intéressant pour l'étude des tissus à blocs.

Prenons l'exemple de ce tissu à 4 blocs.



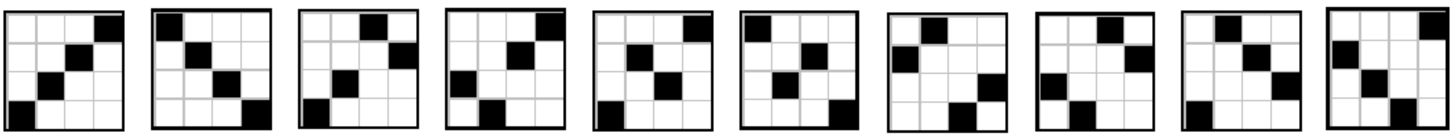
Une relation symétrique de côté n est complètement déterminée le triangle des points égaux ou supérieurs à la première diagonale. Il suffit de faire une symétrie par rapport à la première diagonale pour obtenir le triangle inférieur.
Le nombre de points de ce triangle est la somme des n premiers nombres soit $n(n+1)/2$.
Le nombre de possibilités que ces points soient, soit noirs, soit blanc est de $2^{n(n+1)/2}$
Il y a donc $2^{n(n+1)/2}$ relations symétriques de côté n.

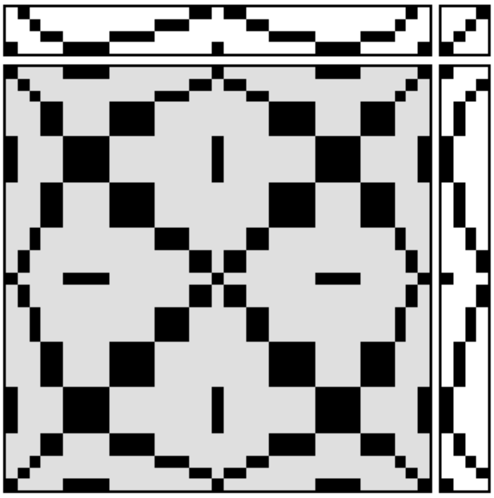
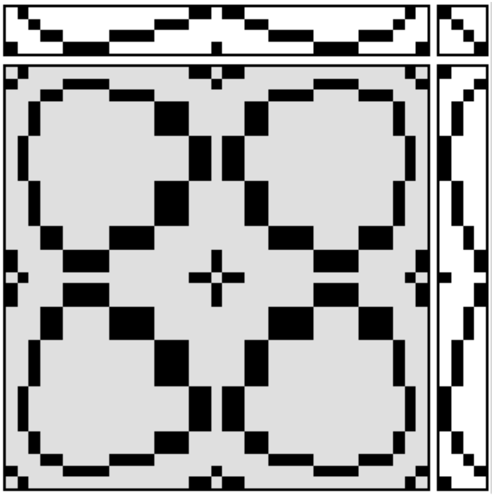
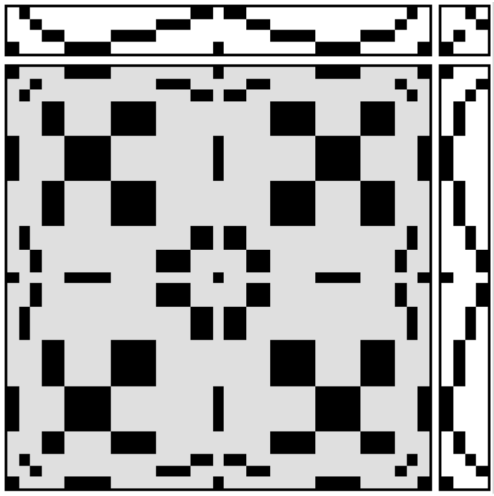
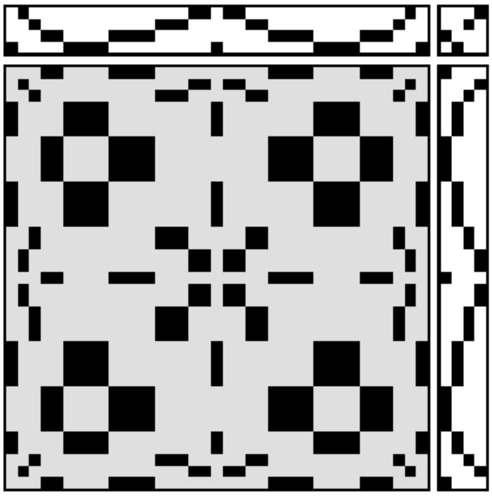
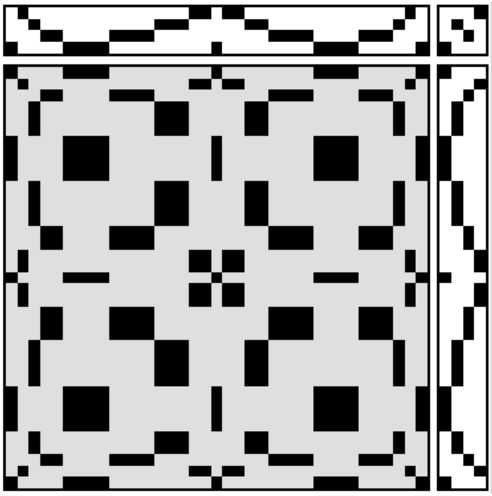
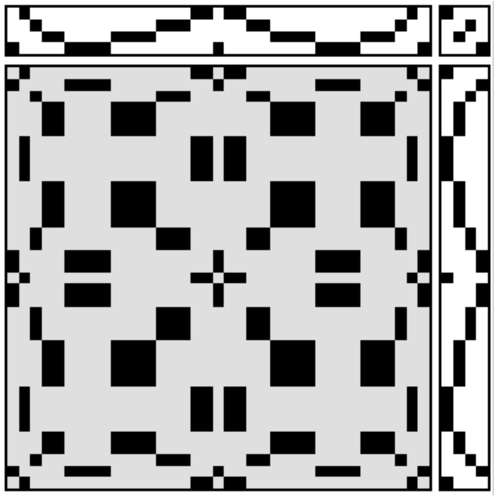
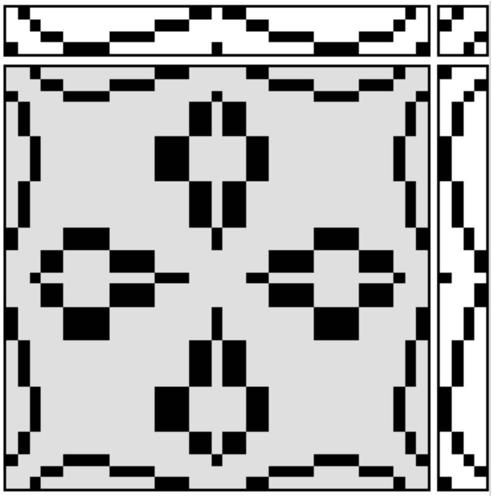
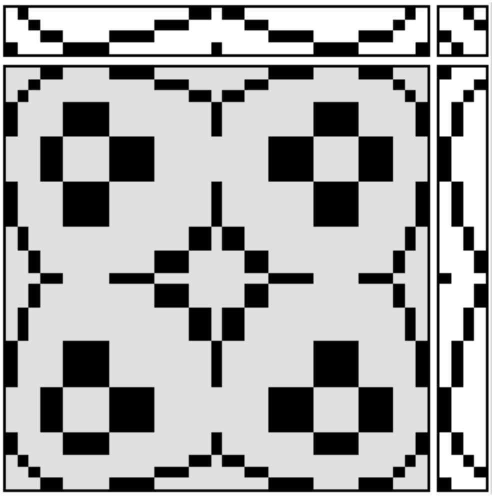
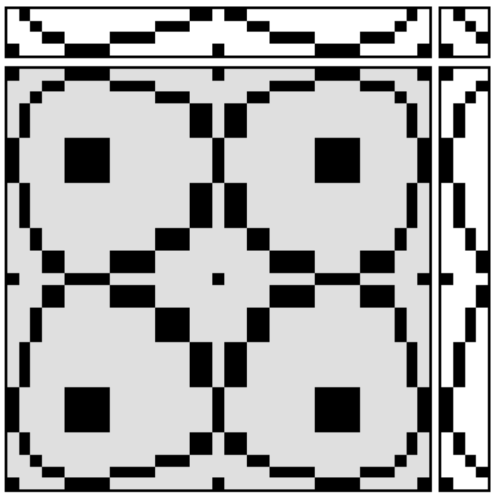
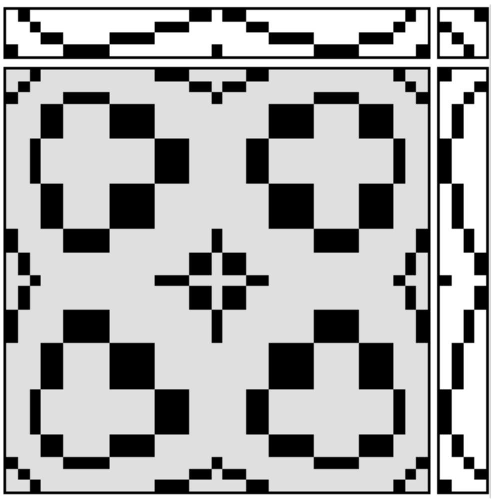
Pour notre exemple le nombre de relations symétriques est de $2^{4(4+1)/2} = 2^{10} = 1024$
C'est beaucoup !

Nous allons nous limiter aux attachages qui ne lèvent qu'un bloc et un seul par pédale.
L'attachage est donc une application, il est carré, c'est donc une bijection. Cette bijection est symétrique, c'est donc une involution.

Il suffit donc d'utiliser toutes les involutions de 4 de côté pour avoir tous les tissus symétriques par rapport à la première diagonale, où un bloc et un seul est activé à chaque duite.

Il y a 10 involutions de 4 de côté :



En remplaçant l'attachage par chacune des involutions possibles nous obtenons tous les graphismes symétriques par rapport à la première diagonale, où un bloc et un seul est activé à chaque duite, possibles avec ce rentrage.
Ces diagrammes représentent un graphisme par blocs, une mise en contexture ultérieure sera nécessaire.

DEUXIEME PARTIE

BASES DE TRANSFORMATION

Forts d'un modèle mathématique rigoureux du diagramme de tissu, nous allons dans cette deuxième partie développer de nouveaux outils qui vont nous permettre de passer progressivement d'un graphisme libre à une interprétation en tissage à cadres.

A ETUDE THéORIQUE

Bien que nous nous rapprochions de la technique du tissage proprement dite, nous commencerons par une mise en place plus théorique des outils. Ils seront mis en oeuvre ensuite sur des exemples précis. Dans les paragraphes suivants nous allons transformer le rentrage, soit en changeant l'ordre des cadres, soit en rentrant les fils de plusieurs cadres sur un même cadre soit encore en répartissant les fils d'un cadre sur plusieurs autres. Le point commun de toutes ces manipulations est que nous agirons toujours globalement au niveau du cadre. L'arrangement relatif des fils sur un même cadre restant inchangé.

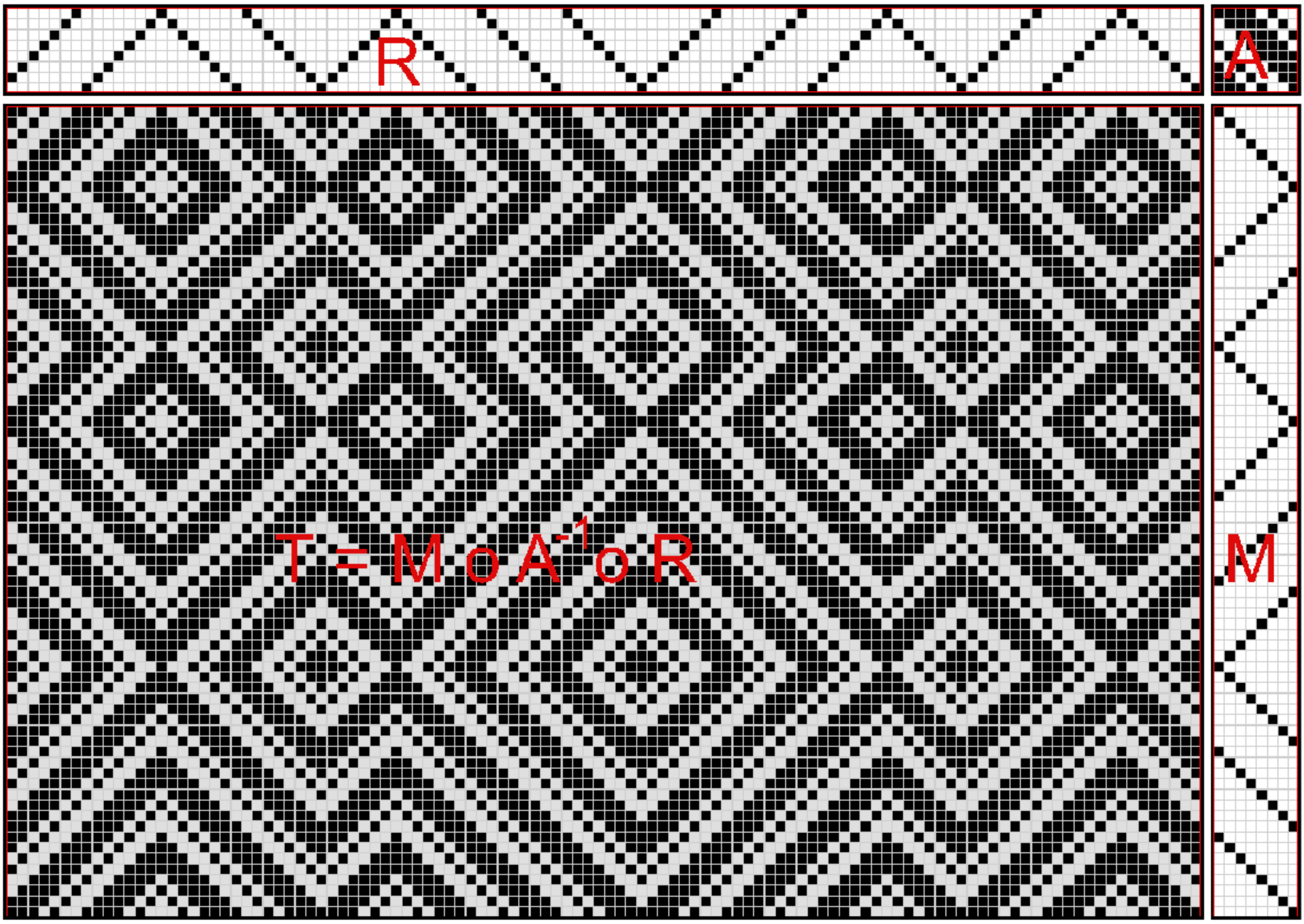
chapitre 1

Transformations conservant la dimension du diagramme. Amalgamages.

Le plus souvent pour des raisons techniques, en particulier pour éviter les frottements et faciliter la séparation des fils dans les chaînes serrées, on est amené à changer l'ordre des cadres d'un métier à tisser. On peut aussi vouloir répartir régulièrement les cadres de liage parmi les cadres de motif. Ce "mélange" des cadres masque les caractéristiques géométriques du rentrage, aussi plutôt que de travailler directement sur des rentrages amalgamés, présentant de bonnes caractéristiques techniques, nous proposons d'étudier d'abord graphiquement les rentrages, puis d'arranger au mieux les cadres seulement une fois que le tissu est au point. Ce surcroît de travail est désormais négligeable grâce aux outils informatiques. En somme il s'agit ici de mélanger les cadres d'un rentrage comme on battrait un jeu de cartes.

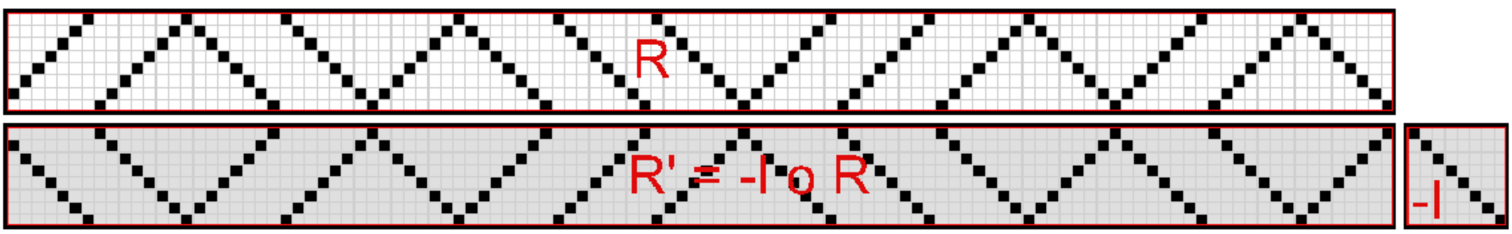
1- BASES DE RéARRANGEMENT

Comment représenter l'action de réarranger les cadres d'un rentrage à l'aide d'un calcul. Au départ un rentrage R, à l'arrivée un rentrage R' qui reprend les cadres de R, mais dans un ordre différent.



T = M o A^{-1} o R

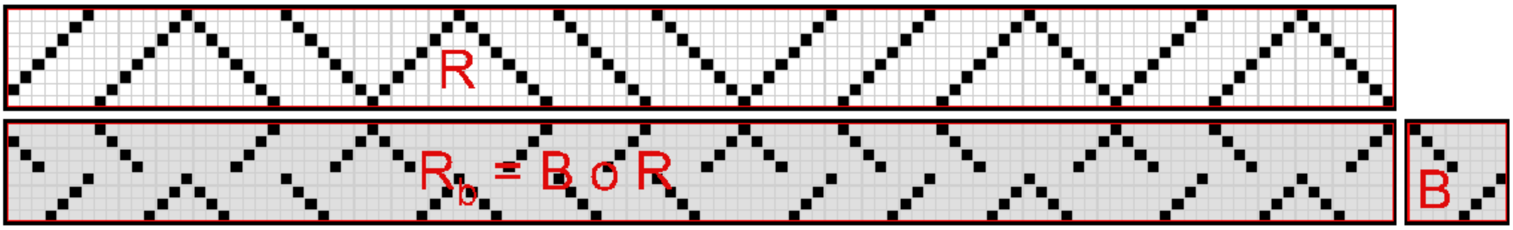
Prenons un cas particulier de réarrangement du rentrage de ce tissu : réarrangeons le rentrage R en disposant ses cadres dans l'ordre inverse. Du dernier au premier. Le rentrage R' obtenu est le symétrique de R par rapport à l'horizontale. Nous avons vu dans la première partie que le symétrique/horizontale de R s'écrit -I o R . Voilà notre calcul !



R' = -I o R

-I est une relation qui permet de transformer R en faisant correspondre au premier cadre le dernier et ainsi de suite. Le diagramme de -I est celui de la deuxième diagonale, ici une diagonale de huit carreaux.
Dans la colonne 1 est cochée la case 8, dans la colonne 2 est cochée la case 8 - 1 = 7. dans la colonne 3 est cochée la case 6, etc. -I est le "tableau de correspondance" entre les cadres de R et de R' . -I est une bijection, à chaque cadre correspond un cadre et un seul.

Pour réarranger les cadres de R dans un autre ordre, il suffit d'utiliser une autre bijection B associant les cadres dans un ordre différent.

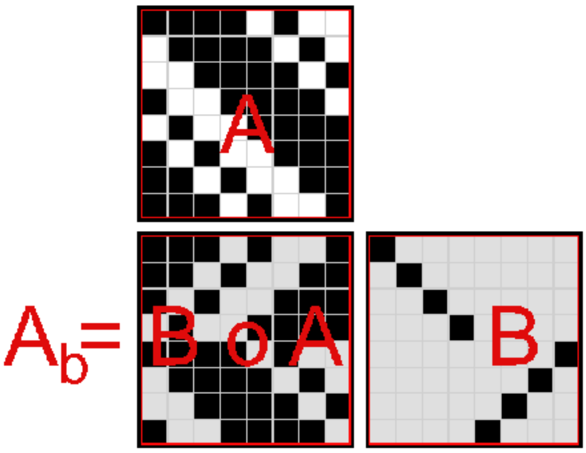


$R_b = B \text{ o } R$

Nous appellerons une telle bijection B une base de réarrangement ; en mathématique on parlera de permutation.

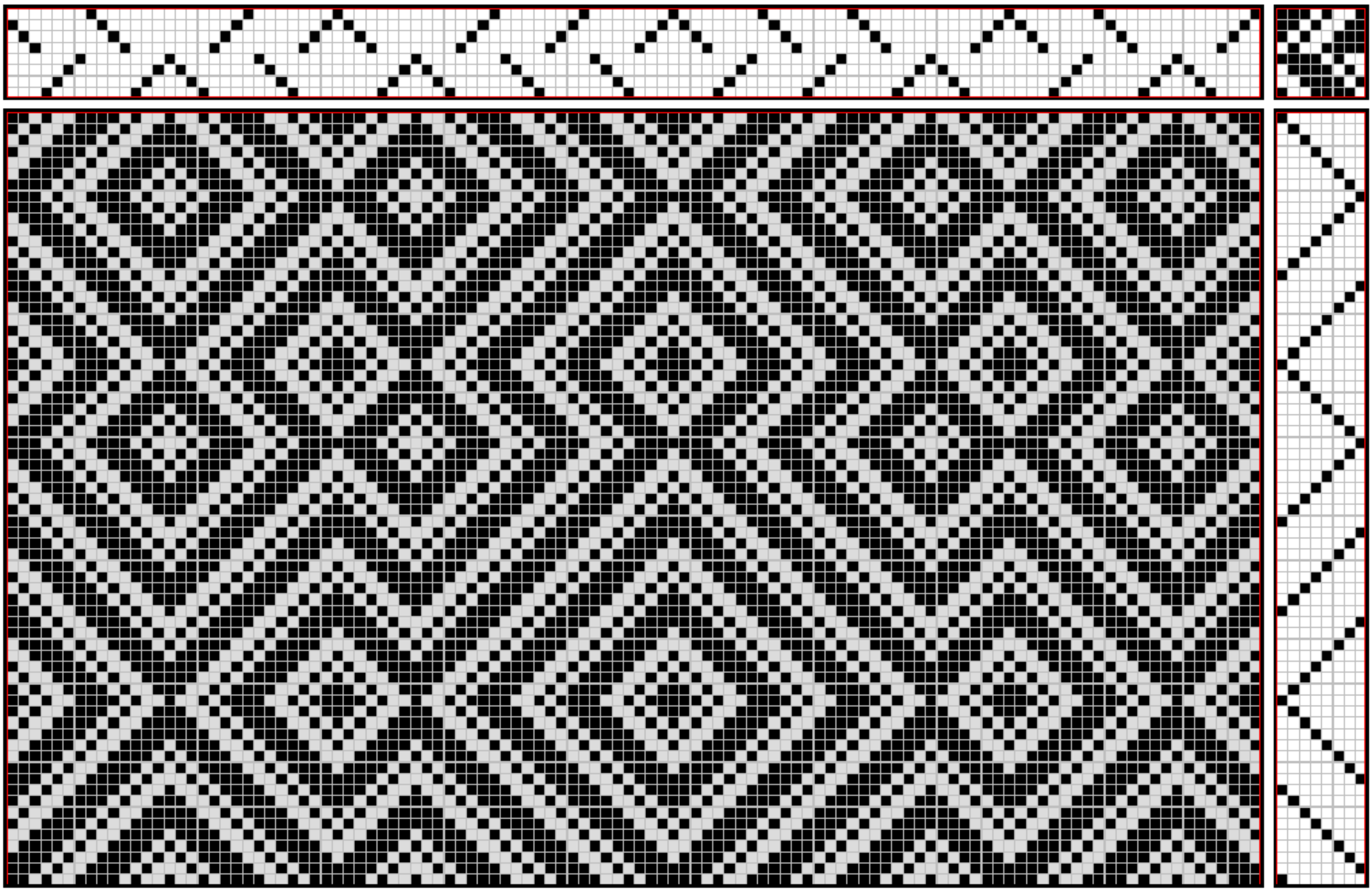
Si l'on remplace dans le diagramme de tissu l'ancien rentrage R par le nouveau rentrage R' ou R_b , le tissu sera bien sûr affecté. En effet les marches, ne commandant plus les mêmes cadres, ne lèveront plus les mêmes fils. Pour conserver le tissu initial, il suffit de transformer l'attachage en changeant l'ordre de ses lignes de la même façon que dans le rentrage ; ainsi les marches commanderont-elles de nouveau les mêmes cadres. Ceci se démontre simplement :

si on pose $R_b = B \text{ o } R$ le rentrage réarrangé par B
$A_b = B \text{ o } A$ l'attachage réarrangé par B



Comparons le tissu initial $T = M \text{ o } A^{-1} \text{ o } R$ avec le tissu $T_b = M \text{ o } A_b^{-1} \text{ o } R_b$

$T_b = M \text{ o } A_b^{-1} \text{ o } R_b$
$T_b = M \text{ o } (B \text{ o } A)^{-1} \text{ o } (B \text{ o } R)$
$T_b = M \text{ o } (A^{-1} \text{ o } B^{-1}) \text{ o } (B \text{ o } R)$
$T_b = M \text{ o } A^{-1} \text{ o } (B^{-1} \text{ o } B) \text{ o } R$
$T_b = M \text{ o } A^{-1} \text{ o } I \text{ o } R$ B est une bijection donc $B^{-1} \text{ o } B = I$
$T_b = M \text{ o } A^{-1} \text{ o } R$
$T_b = T$ Les deux tissus sont donc identiques.



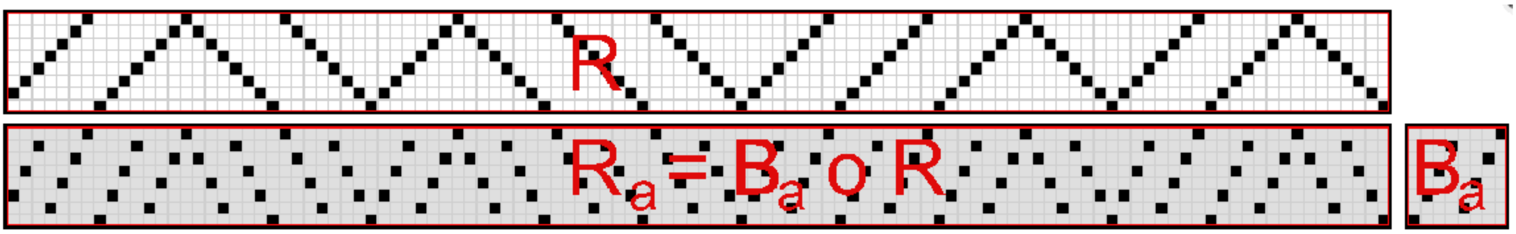
$T_b = M \circ A_b^{-1} \circ R_b = M \circ (B \circ A)^{-1} \circ (B \circ R) = T$

On peut réarranger les cadres d'un rentrage dans un ordre quelconque, sans changer le tissu en représentation Marchure-Attachage-Rentrage , à condition de réarranger simultanément les lignes de l'attachage suivant le même ordre.

2- AMALGAMAGE

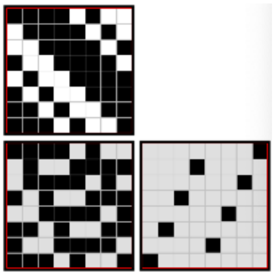
Quel est le but recherché dans l'amalgamage ? Il s'agit d'éloigner les lisses contenant des fils voisins. Une des solutions consiste réarranger le rentrage en reprenant les cadres dans le même ordre, mais en les décalant de deux en deux sur les cadres pairs puis sur les cadres impairs.

Pour obtenir automatiquement le rentrage amalgamé R_a , calculons le diagramme de tissu $B_a \circ R$, en choisissant pour bijection B_a cette base de décalage.



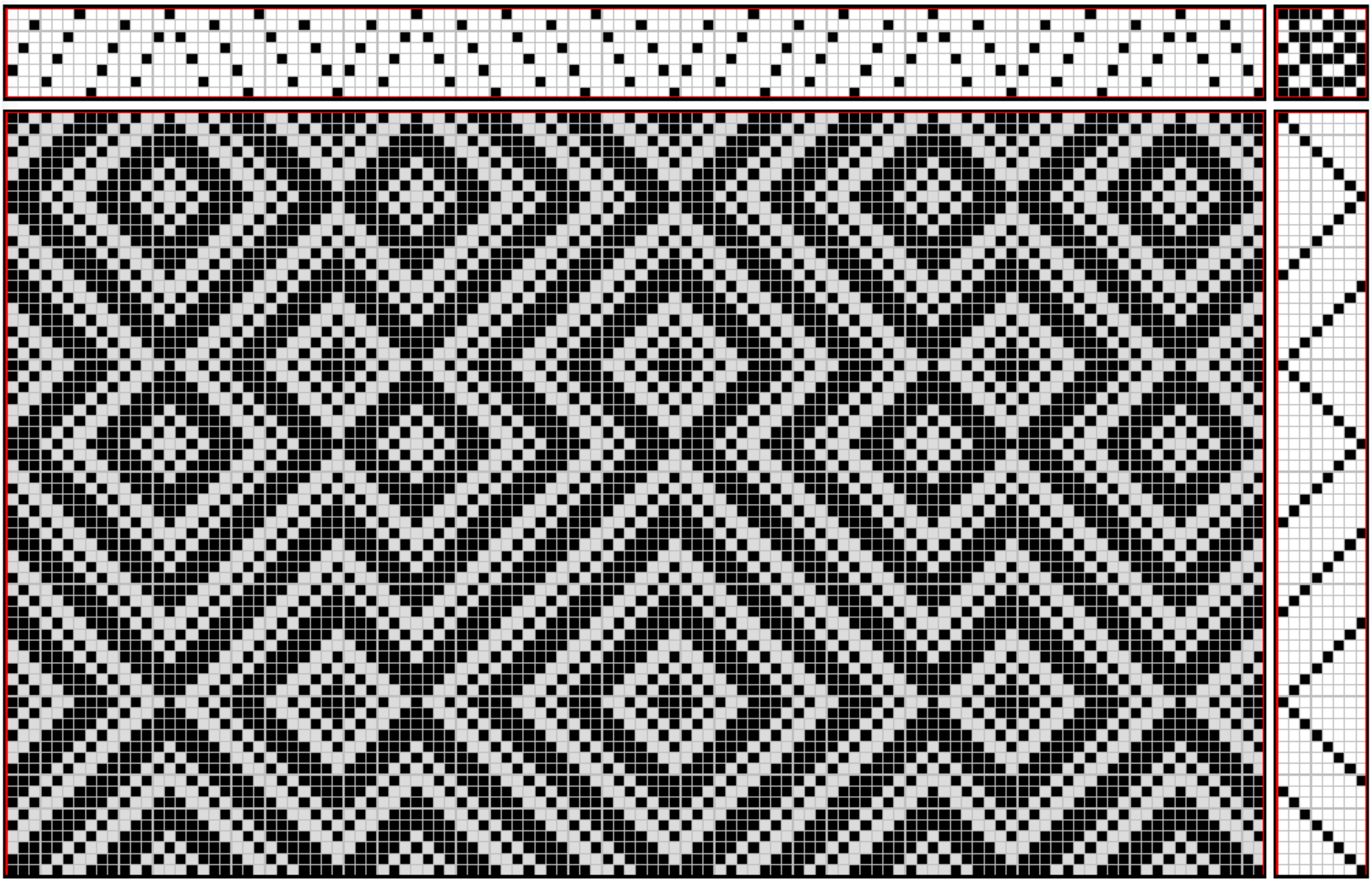
$R_a = B_a \circ R$

Pour obtenir l'attachage A_a amalgamé correspondant (dont les lignes ont été réarrangées de la même manière), il suffit de calculer $B_a \circ A$.



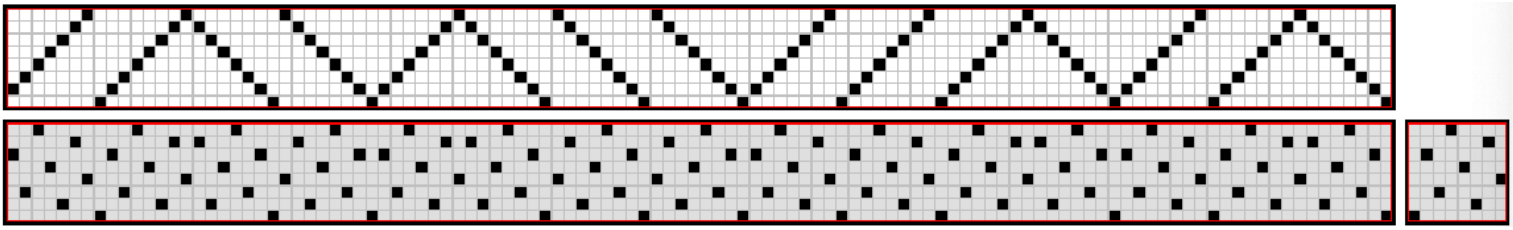
$A_a = B_a \circ A$

Nous retrouvons bien le tissu de départ, mais ici les lisses voisines sont séparées par au moins un cadre.

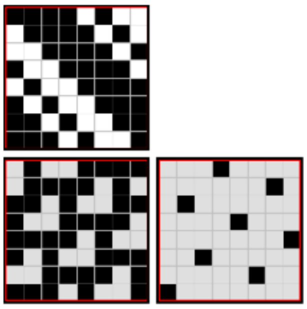


$T_a = M \circ A_a^{-1} \circ R_a = M \circ (B_a \circ A)^{-1} \circ (B_a \circ R) = T$

Notre connaissance du tissage va nous aider à trouver la base d'amalgamage optimum.
Il s'agit d'associer cycliquement les 8 nombres, d'une manière régulière, en sorte que leur différence soit la plus grande possible. C'est un satin qu'il nous faut ! En effet qu'est-ce qu'un satin, sinon une armure où l'on cherche à répartir les liages, d'une manière régulière, en sorte qu'ils soient le plus éloignés possible les uns des autres. Le plus grand décochement possible pour un satin de 8 est le décochement 5. La meilleure base d'amalgamage sera donc un satin de huit à décochement de cinq.

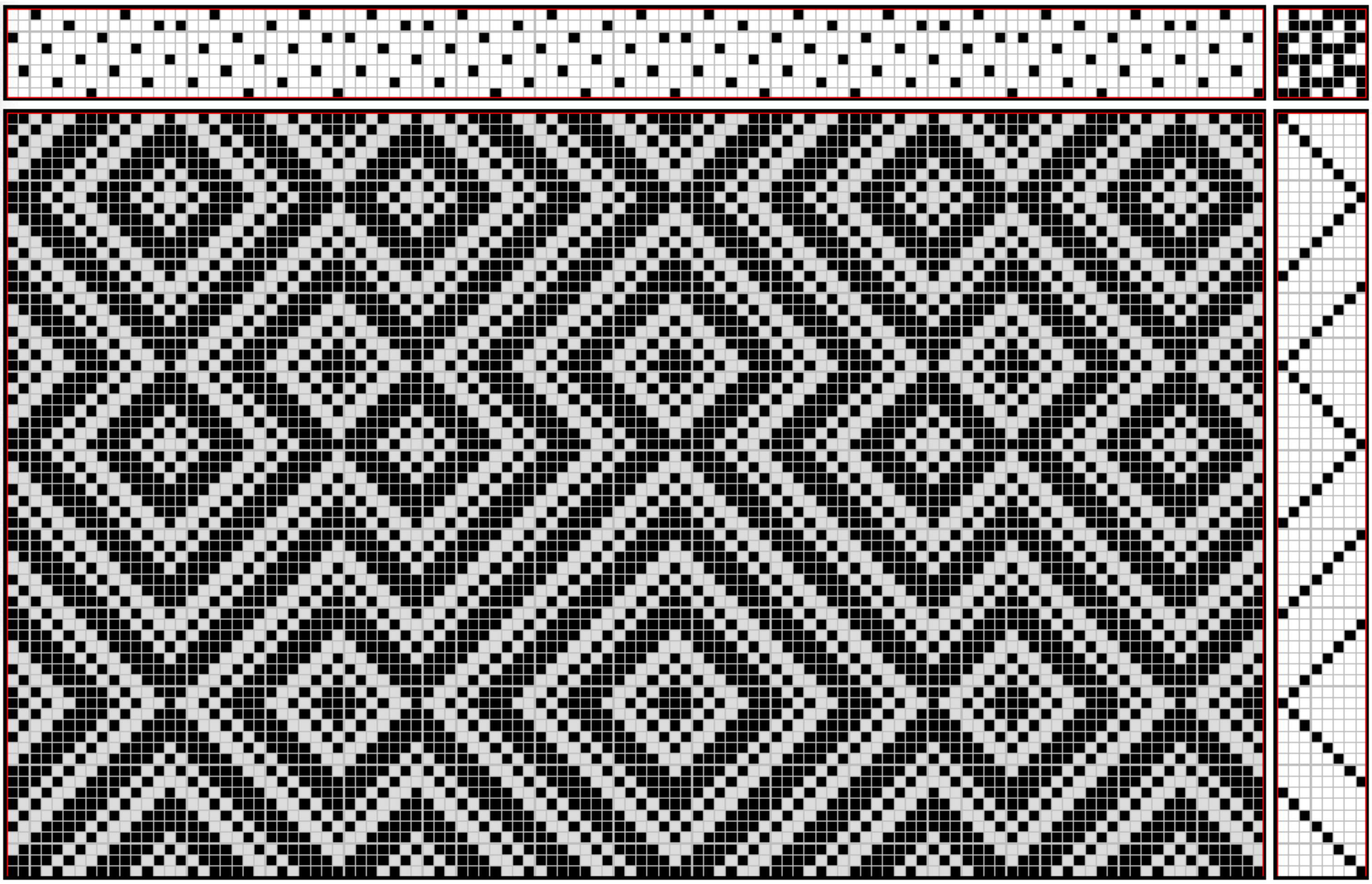


$R_s = B_s \mathrm{~o~} R$



$A_s = B_s \mathrm{~o~} A$

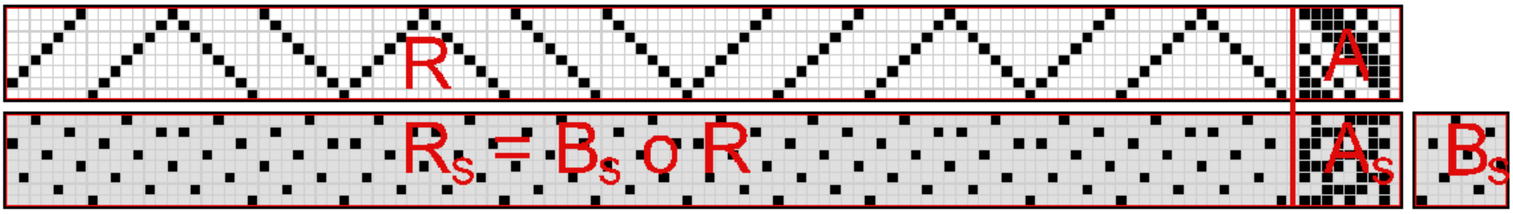
Décaler cycliquement à la main les 8 cadres d'un rentrage de cinq en cinq demande de l'attention. La fonction de calcul du diagramme de tissu nous permet d'opérer rapidement et sans erreur, sur le rentrage, puis sur l'attachage.



$T_s = M \mathrm{~o~} A_s^{-1} \mathrm{~o~} R_s = M \mathrm{~o~} (B_s \mathrm{~o~} A)^{-1} \mathrm{~o~} (B_s \mathrm{~o~} R) = T$

Nous avons maintenant un rentrage techniquement valable, mais dont le graphisme a été complètement estompé.

Pour obtenir le nouveau rentrage R_s et le nouvel attachage A_s amalgamés par la base B_s, nous avons calculé deux diagrammes de tissu : $R_s = B_s \circ R$ et $A_s = B_s \circ A$. En fait un seul calcul aurait suffit, en utilisant un diagramme multiple de tissu. En construisant un rentrage composite où figureraient côte à côte R et A, nous pourrions calculer un seul diagramme de tissu, avec B_s comme marchure ; on obtiendrait dans la partie tissu, côte à côte les deux résultats R_s et A_s .

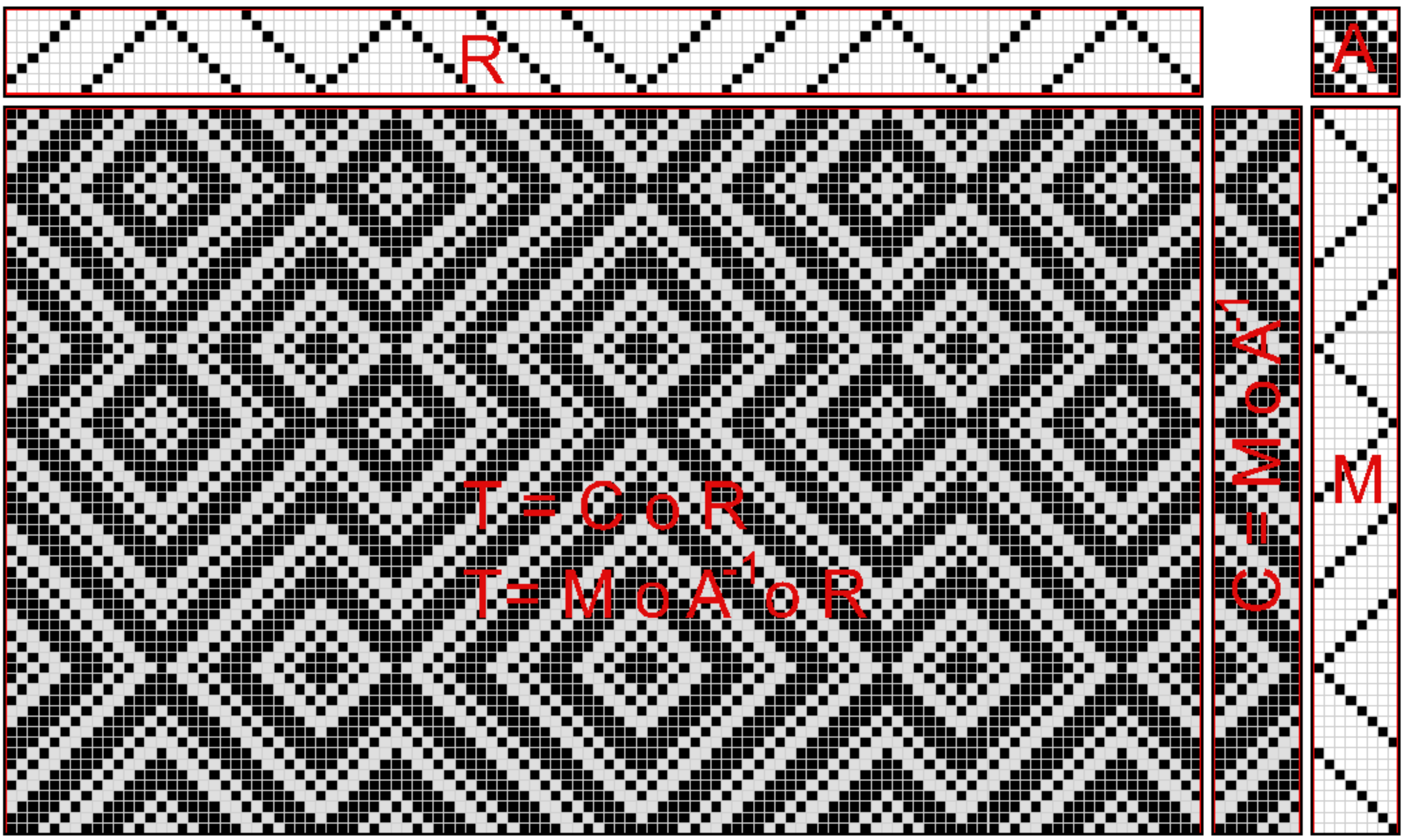


$R_s = B_s \circ R$ $A_s = B_s \circ A$

En fait nous allons voir qu'il existe une manière encore plus astucieuse de procéder.
Dans toutes ces transformations nous n'avons pas touché à la marchure du tissu. Pour une optique tissage à la main ceci est important. En effet on recherche alors un nombre minimal de marches et surtout un schéma de marchure facile à suivre et à mémoriser. Dans l'exemple précédant l'aspect graphique du rentrage a complètement disparu, mais celui de la marchure est resté intact.
Dans une perspective industrielle il est plus naturel d'agir sur le carton. C'est pourquoi nous allons aborder une autre technique d' amalgamage d'un tissu.

3- DIAGRAMME MULTIPLE D'AMALGAMAGE

Transformons notre tissu dans la représentation du type "carton-rentrage" (voir première partie, C, chapitre 2).



$C = M \circ A^{-1}$ $T = M \circ A^{-1} \circ R = C \circ R$

Comment agir sur le carton C pour que le tissu à rentrage amalgamé reste inchangé ?
Reprenons l'exemple d'un amalgamage sur les cadres pairs et impairs.

Dans la représentation avec attachage nous avons vu qu'il suffisait de réarranger les lignes du rentrage R et de l'attachage A avec la même bijection B_a.

> Le rentrage amalgamé s'écrit $R_a = B_a \circ R$
> L'attachage amalgamé s'écrit $A_a = B_a \circ A$
> Le tissu amalgamé T_a est égal au tissu de départ T
> $T_a = M \circ A_a^{-1} \circ R_a = M \circ (B_a \circ A)^{-1} \circ (B_a \circ R) = M \circ A^{-1} \circ B_a^{-1} \circ B_a \circ R = M \circ A^{-1} \circ R = T$

Dans la représentation sans attachage, le tissu s'écrit

> $T = C \circ R$ avec le carton $C = M \circ A^{-1}$

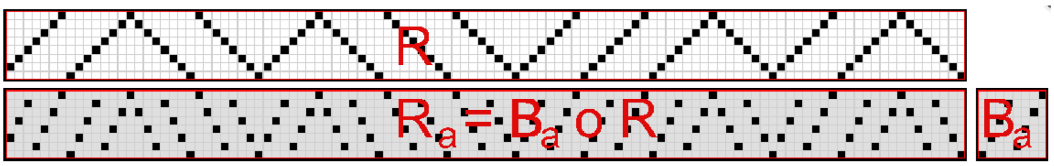
D'après ci-dessus on a $T = M \circ A^{-1} \circ B_a^{-1} \circ B_a \circ R$
soit $T = C \circ B_a^{-1} \circ R_a$

Si on note C_a le carton C transformé par la réciproque de la bijection B_a , soit $C_a = C \circ B_a^{-1}$
On peut écrire $T = C_a \circ R_a$

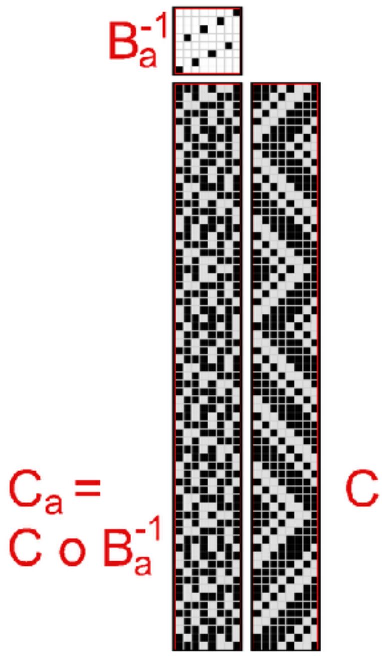
D'une autre manière on peut écrire :
$C_a \circ R_a = C \circ B_a^{-1} \circ B_a \circ R$
$C_a \circ R_a = C \circ I \circ R$ $\qquad B_a^{-1} \circ B_a = I$, car B_a est une bijection
$C_a \circ R_a = C \circ R$
$C_a \circ R_a = T$

On peut réarranger les cadres d'un rentrage dans un ordre quelconque, sans changer le tissu en représentation Carton-Rentrage , à condition de réarranger simultanément les colonnes du carton suivant l'ordre réciproque.

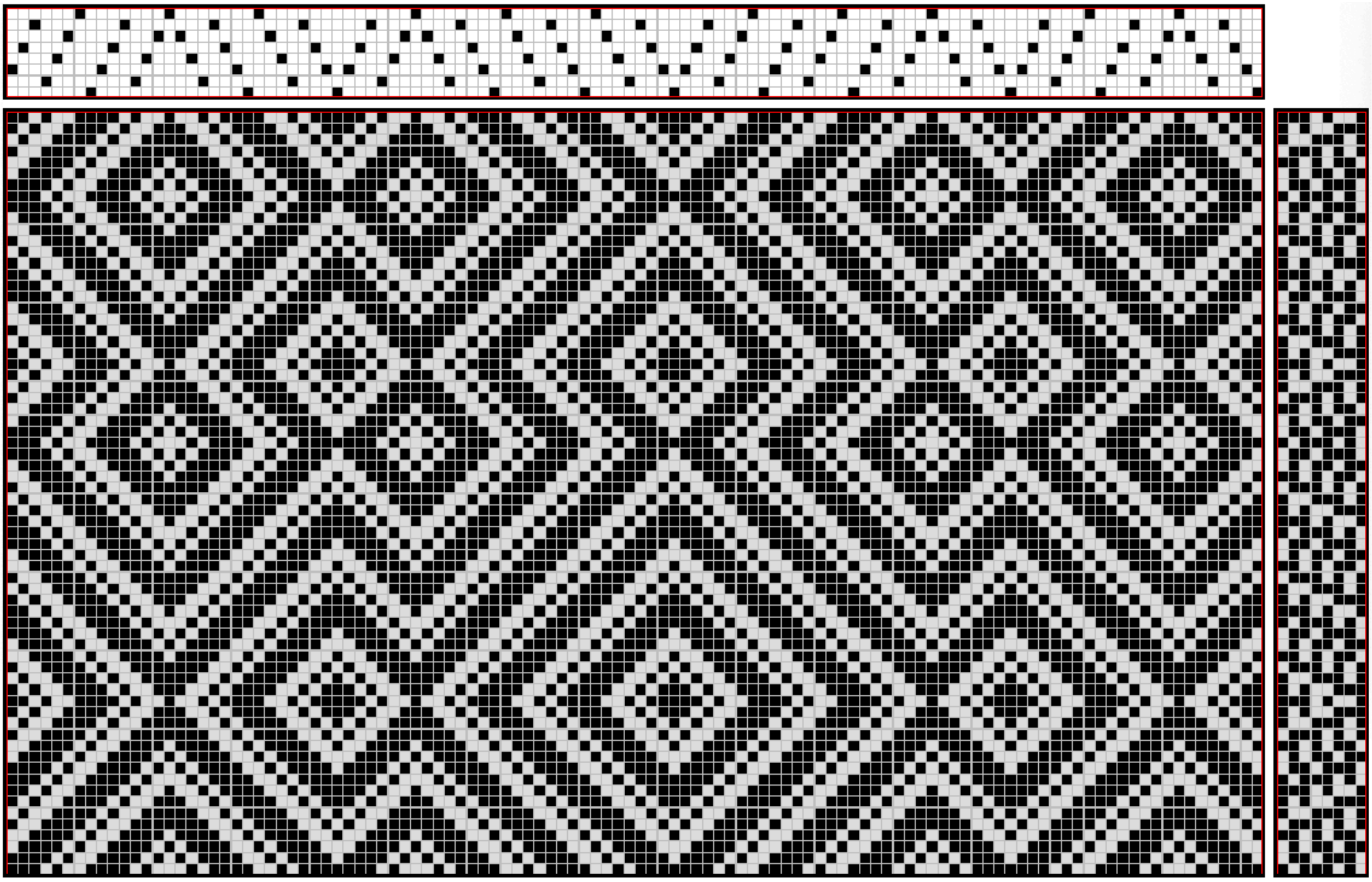
Plus simplement on peut dire que pour que le tissu ne change pas, il suffit de réarranger les colonnes du carton de manière à ce que chaque colonne du carton corresponde toujours au même cadre du rentrage.



$R_a = B_a \circ R$



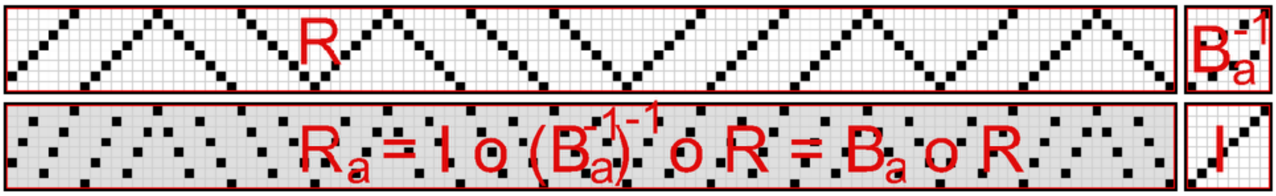
$C_a = C \circ B_a^{-1}$



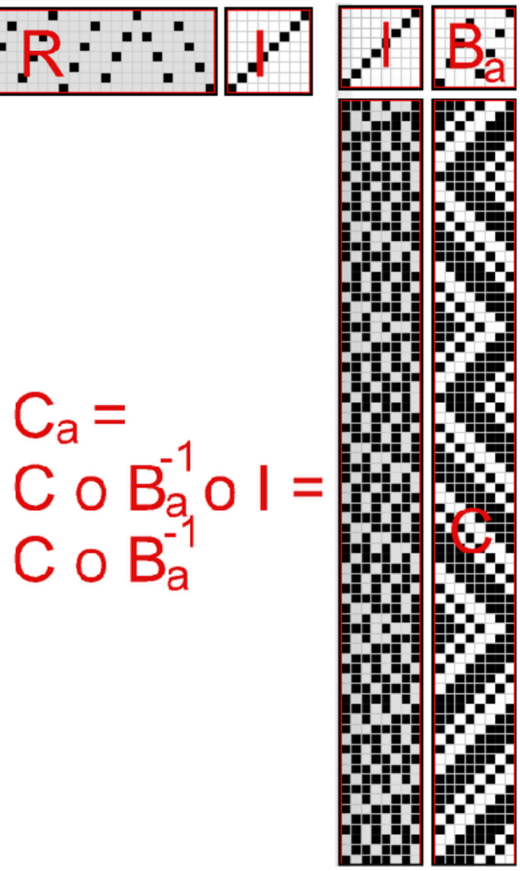
$T_a = C_a \circ R_a = (C \circ B_a^{-1}) \circ (B_a \circ R) = C \circ I \circ R = C \circ R = T$

Nous allons regrouper tous ces calculs sur un diagramme multiple de tissu. Ainsi nous pourrons passer automatiquement du diagramme du tissu initial au diagramme du tissu amalgamé à l'aide d'un seul calcul.

Pour cela nous allons d'abord présenter le calcul du rentrage amalgamé R_a et celui du carton amalgamé C_a d'une autre manière, en faisant opérer la réciproque de la base B_a^{-1}, ou la base B_a dans l'attachage (voir première partie, D, chapitre 1).

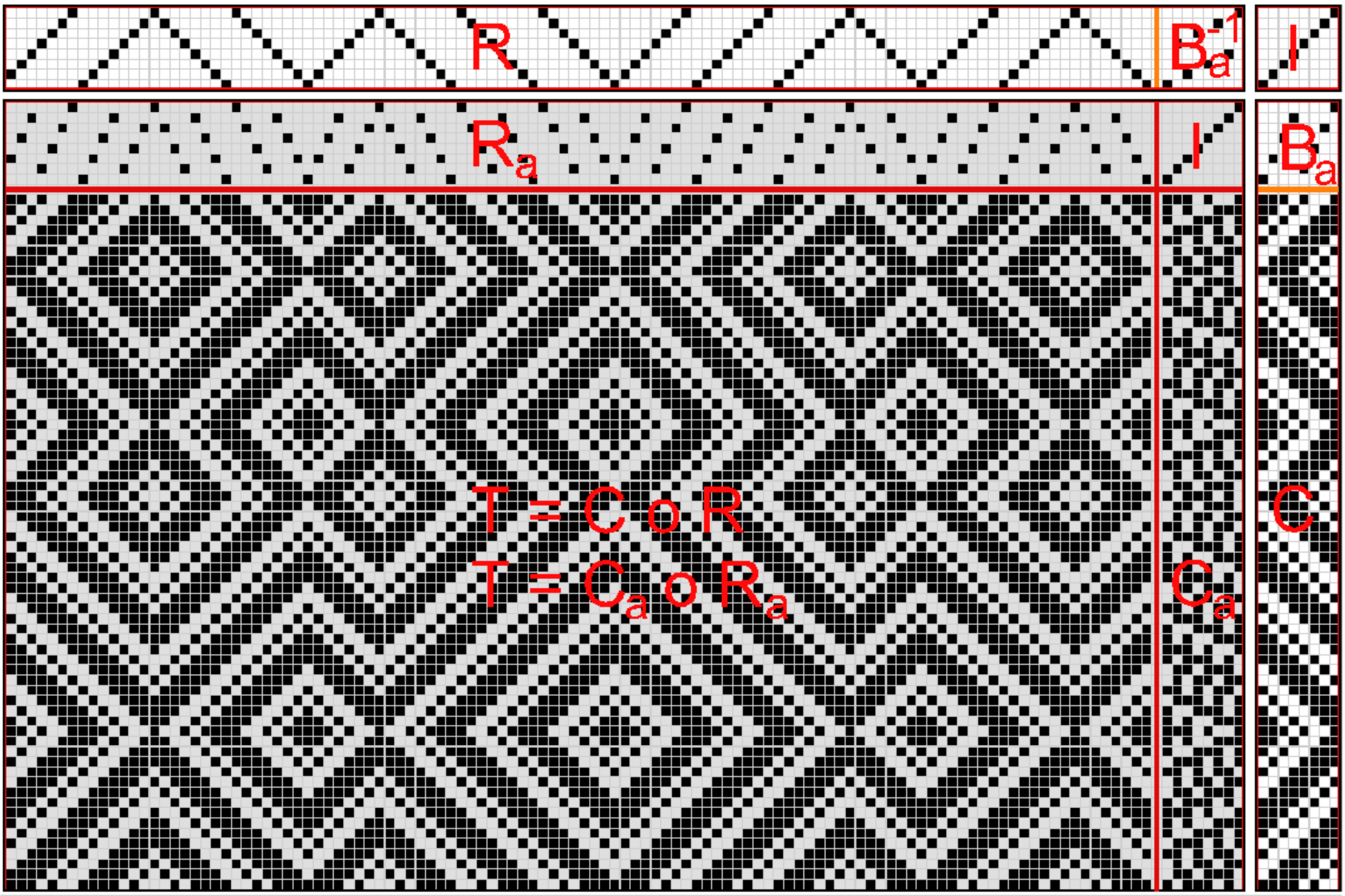


$R_a = I \circ (B_a^{-1})^{-1} \circ R$ $\quad\quad$ $R_a = B_a \circ R$



En rapprochant le calcul du nouveau rentrage
$R_a = B_a \circ R$
et celui du nouveau carton
$C_a = C \circ B_a^{-1}$,
jusqu'à confondre les deux identités I, nous obtenons le diagramme multiple cherché.

Ajoutons I dans la case du coin haut droit et examinons les quatre calculs vrais de ce diagramme multiple.



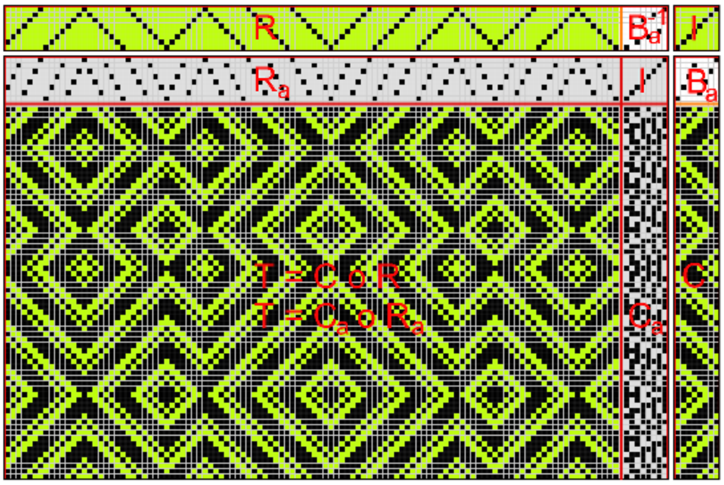
Les deux tissus équivalents sur un unique diagramme multiple, $T = C \circ R$ et $T = C_a \circ R_a$

A l'extérieur haut droit, les 4 diagrammes encadrés montrent le calcul réellement fait par l'ordinateur.
Ces diagrammes sont formés :

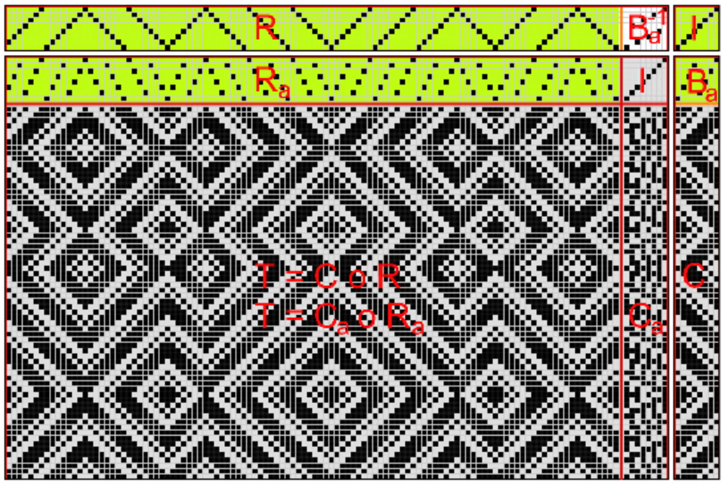
- d'une marchure composite comprenant le carton C_a surmontée (trait orange) de la base B_a
- d'un attachage suivi
- d'un rentrage composite comprenant le rentrage R_a prolongé (trait orange) à droite de la réciproque B_a^{-1} de la base B_a.
- d'un diagramme de tissu, sur fond gris, qui a l'apparence (traits rouges) d'un deuxième ensemble de 4 diagrammes formant le tissu amalgamé.

Nous allons voir que les calculs réels effectués par l'ordinateur et les calculs apparents sont équivalents.

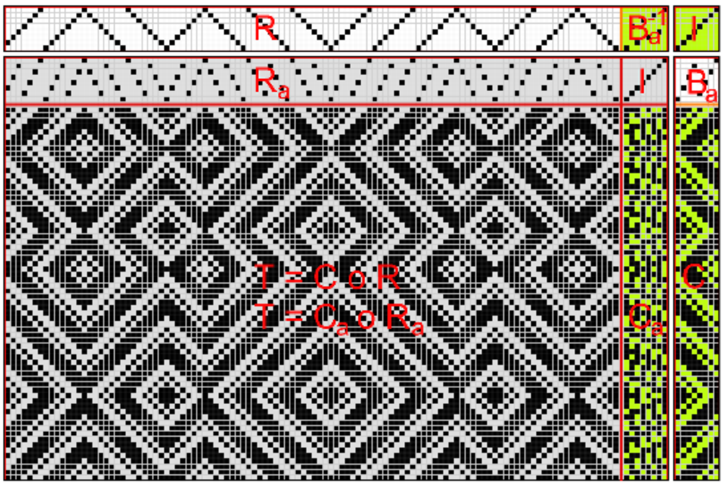
Les 4 calculs effectués par l'ordinateur, en vert :



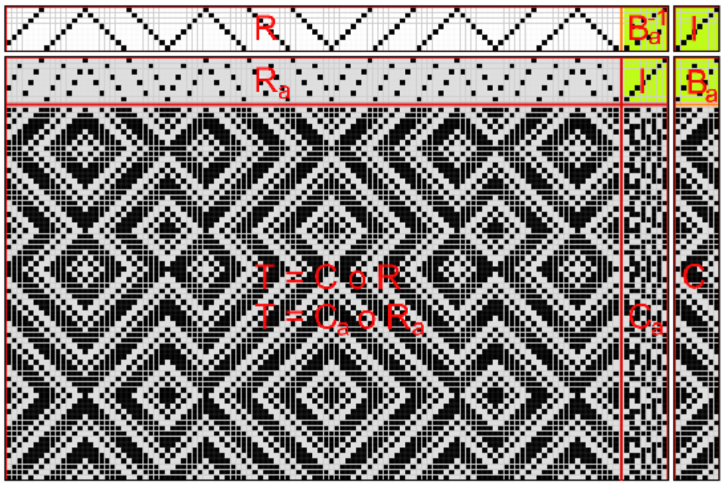
Le tissu initial
$T = C \circ I^{-1} \circ R$ $\qquad$ $T = C \circ R$



Le rentrage amalgamé
$R_a = B_a \circ I^{-1} \circ R$ $\qquad$ $R_a = B_a \circ R$

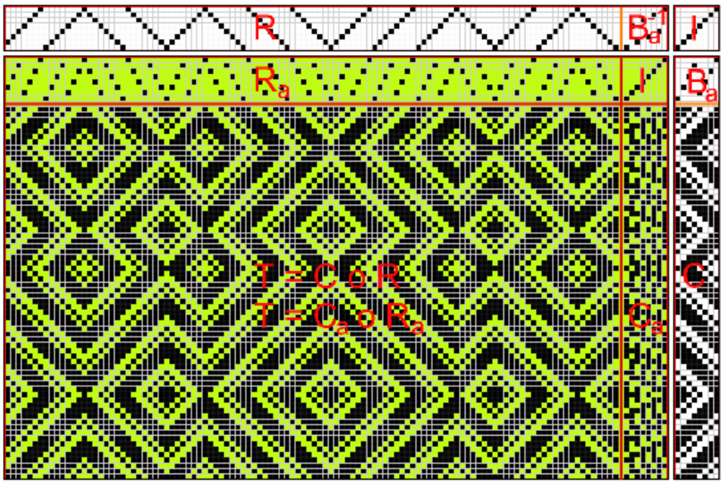


Le carton amalgamé
$C_a = C \circ I^{-1} \circ B_a^{-1}$ $\qquad$ $C_a = C \circ B_a^{-1}$



L'attachage identité
$B_a \circ I^{-1} \circ B_a^{-1} = B_a \circ B_a^{-1} = I$
$B_a \circ B_a^{-1} = I$ car B_a est une bijection.

Les 5 calculs de tissus apparents qui sont tous justes.

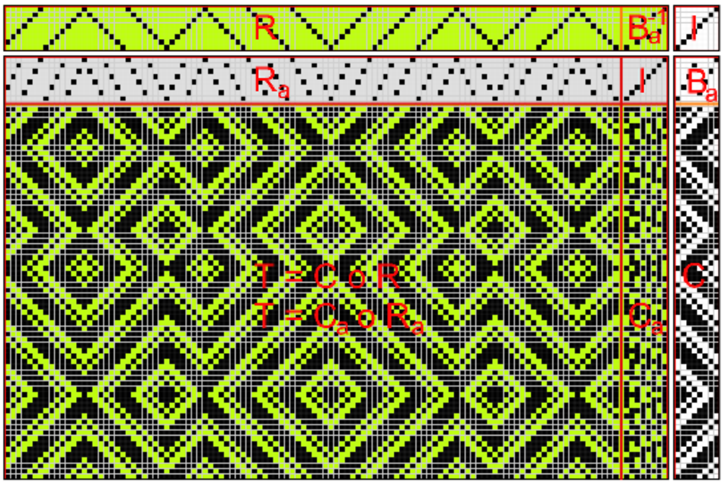


Le tissu amalgamé

$T_a = C_a \circ I^{-1} \circ R_a = (C \circ B_a^{-1}) \circ (B_a \circ R)$

$T_a = C \circ I \circ R$

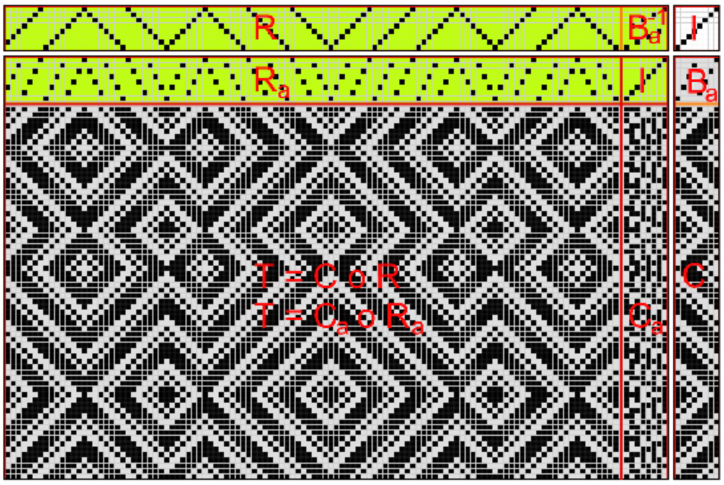
$T_a = C \circ R = T$



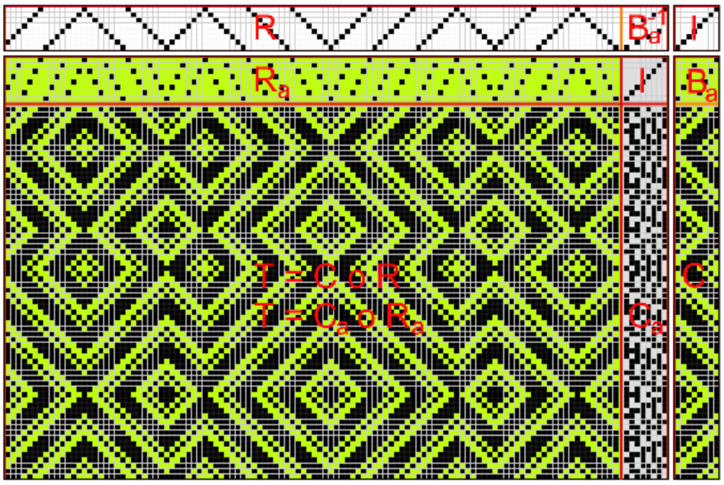
$T_a = C_a \circ (B_a^{-1})^{-1} \circ R$

$T_a = C \circ B_a^{-1} \circ (B_a^{-1})^{-1} \circ R$

$T_a = C \circ I \circ R = C \circ R = T$

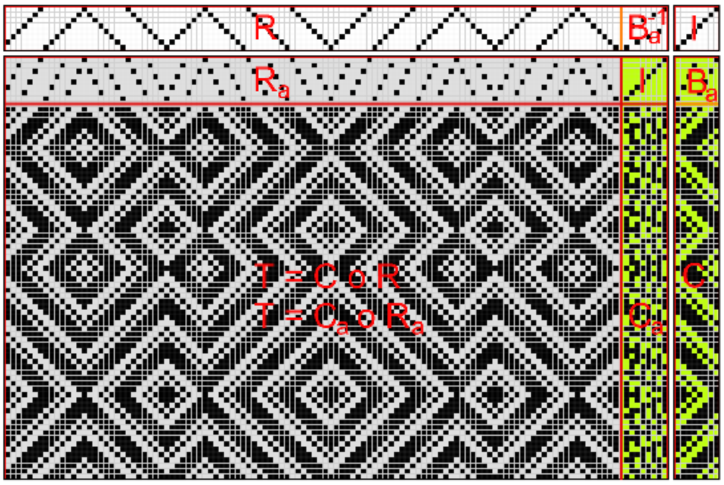


$R_a = I \circ (B_a^{-1})^{-1} \circ R = B_a \circ R$



$T = C \circ B_a^{-1} \circ R_a = C \circ B_a^{-1} \circ B_a \circ R$

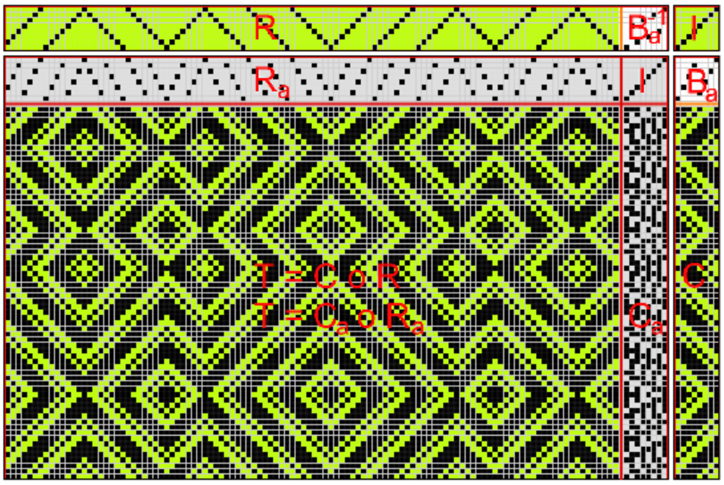
$T = C \circ I \circ R = C \circ R$



$C_a = C \circ B_a^{-1} \circ I$

$C_a = C \circ B_a^{-1}$

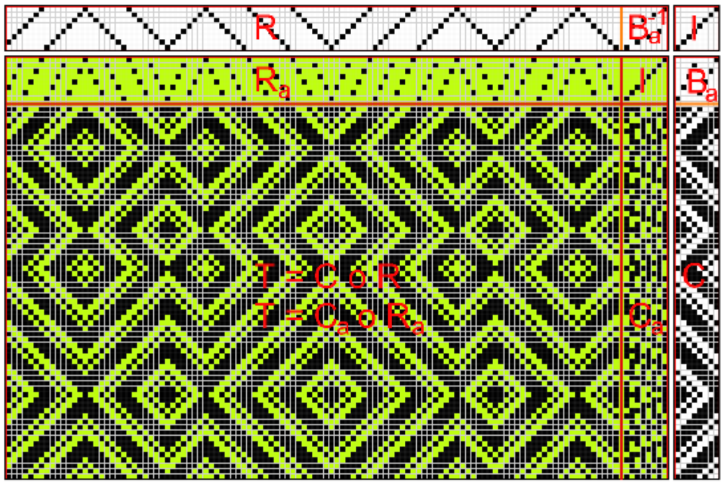
En fait on ne lira le diagramme de tissu multiple comme l'affichage de deux tissus équivalents : le tissu initial et le tissu amalgamé.



Le tissu initial

$T = C \circ I^{-1} \circ R$

$T = C \circ R$



Le tissu amalgamé

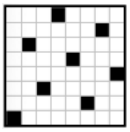
$T_a = C_a \circ I^{-1} \circ R_a = C_a \circ R_a$

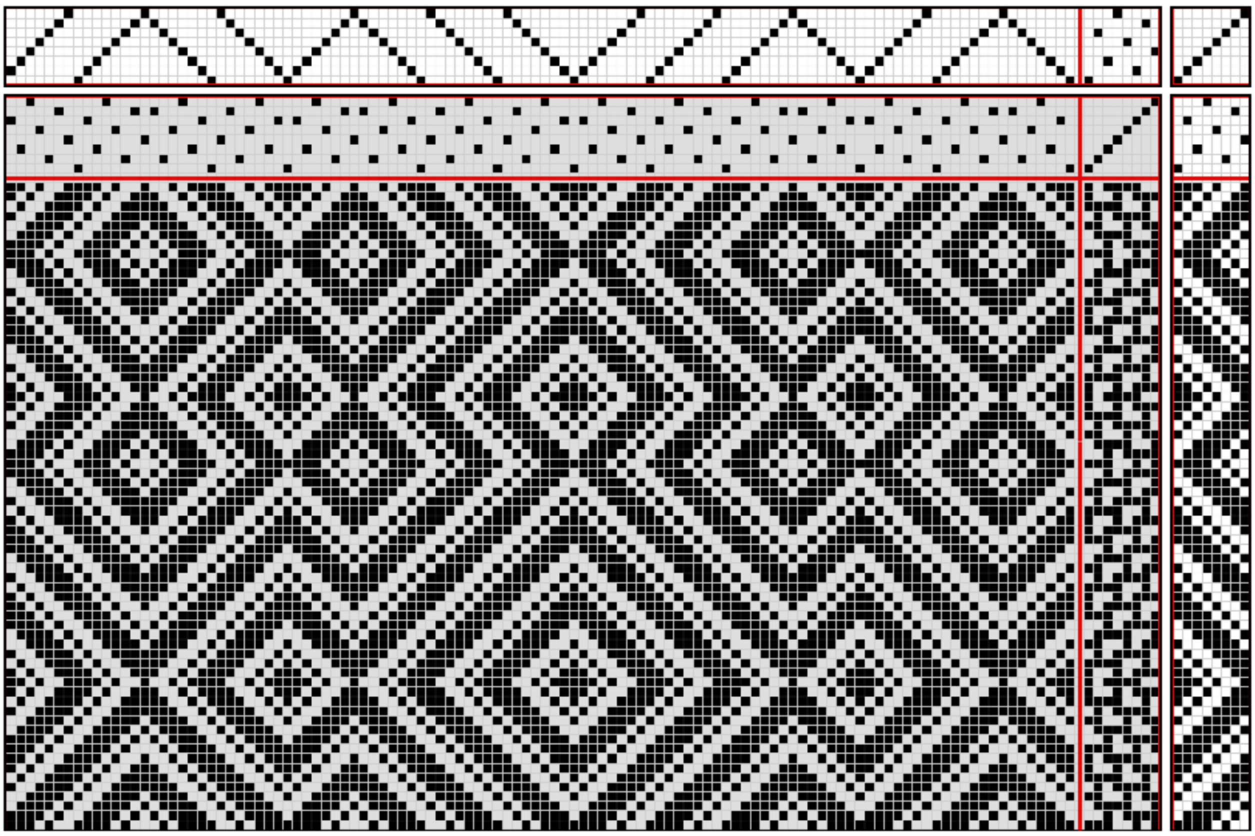
$T_a = (C \circ B_a^{-1}) \circ (B_a \circ R)$

$T_a = C \circ I \circ R$

$T_a = C \circ R = T$

Pour passer du tissu initial à un tissu équivalent où l'on mélange les lignes des cadres et les colonnes du carton, il suffit de choisir une bijection et de remplacer la bijection B_a et sa réciproque B_a^{-1} dans le diagramme de tissu multiple.

Par exemple utilisons la bijection, satin de 8, B_s =  qui amalgame encore plus souplement le rentrage. Notez que $B_s = B_s^{-1}$, B_s est donc symétrique, c'est une involution.



Le simple changement de base, donne le nouveau tissu amalgamé

4- DIAGRAMMES éOUIVALENTS

Considérons la démarche que nous venons d'accomplir avec un peu de recul. Nous avons transformé un rentrage R pour obtenir le rentrage amalgamé R' en composant R suivi d'une bijection B : R' = B o R. Nous savons corriger le carton en sorte que le tissu soit conservé, c.-à-d. que les rentrages R et R' produisent le même tissu. On peut même dire plus : tous les tissus que l'on peut obtenir avec le rentrage R , nous pourrons également les obtenir avec le rentrage R' , puisque pour chaque tissu nous sommes toujours capables de trouver le carton qui le conservera avec le rentrage R'.
Intuitivement on sent bien que R et R' ne sont pas très différents ; en fait ils ont les même cadres, mais dans un ordre différent. Nous dirons que le rentrage R' est équivalent au rentrage R. Plus généralement nous dirons :

Une relation A' est "équivalente, à l'ordre des lignes près" à une relation A, si et seulement si il existe une bijection B telle que A' = B o A

Si A' est "équivalente, à l'ordre des lignes près" à A, comme la composée de A suivie de la bijection B, alors A est "équivalente, à l'ordre des lignes près" à A' comme la composée de A' suivie de la bijection B^{-1}.

En effet

A' = B o A	=>	B^{-1} o A' = B^{-1} o B o A	
A' = B o A	=>	B^{-1} o A' = I o A	B^{-1} o B = I car B est une bijection
A' = B o A	=>	B^{-1} o A' = A	
A' = B o A	=>	A = B^{-1} o A'	A est "équivalente, à l'ordre des lignes près" à A' comme la composée de A' suivie de la bijection B^{-1}.

On dira alors que les relations A et A' sont "équivalentes, à l'ordre des lignes près".

Une relation A' est "équivalente, à l'ordre des colonnes près" à une relation A, si et seulement si il existe une bijection B telle que A' = A o B

De la même manière on montrerait que :

Si A' est "équivalente, à l'ordre des colonnes près" à A, comme la composée de la bijection B suivie de A, alors A est "équivalente, à l'ordre des colonnes près" à A', comme la composée de la bijection B^{-1} suivie de A.

On dira alors que les relations A et A' sont "équivalentes, à l'ordre des colonnes près".

On parlera simplement de "rentrages équivalents" pour des rentrages "équivalents, à l'ordre des lignes près".
On parlera simplement de "cartons équivalents" pour des cartons "équivalents, à l'ordre des colonnes près"

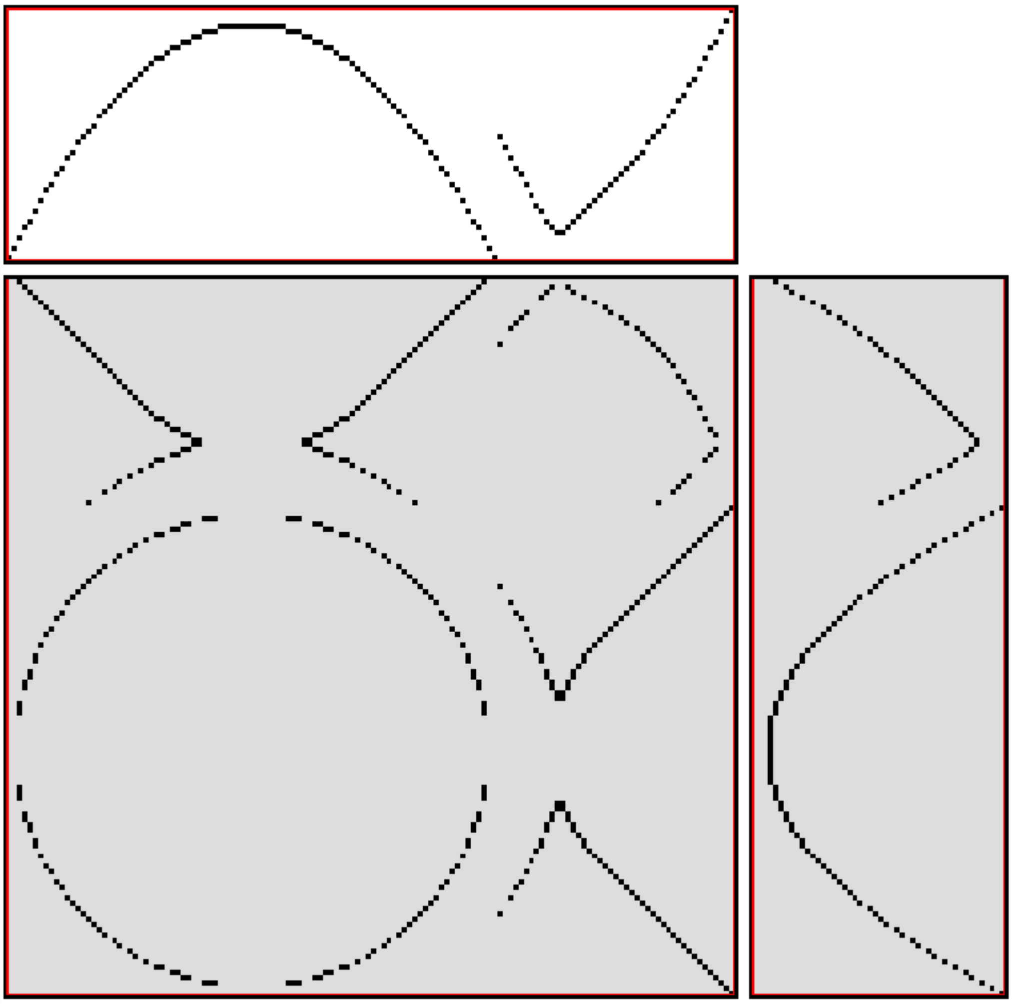
Nous allons maintenant transformer les rentrages avec une technique similaire, c.-à-d. en remplaçant un rentrage R par le rentrage R' = B o R, mais en choisissant B de manière à modifier plus profondément les rentrages.

Transformations diminuant la dimension du diagramme. Télescopages.

La difficulté d'interprétation d'une courbe en tissage à lames vient surtout du fait qu'un rentrage n'a qu'un nombre très limité de cadres. Comment faire entrer une courbe dessinée sur une feuille de mise en carte de 48 lignes dans un rentrage de 12 cadres ? ... C'est le problème que nous vous proposons de résoudre dans ce chapitre. Il existe deux grandes familles de solutions :

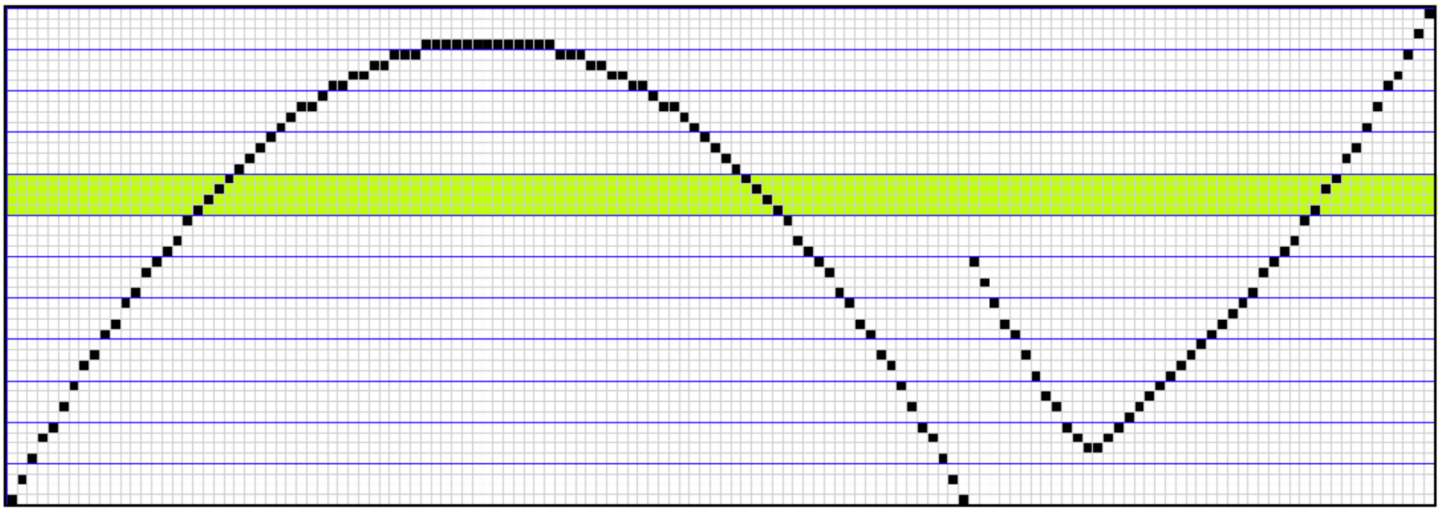
- réduire la définition verticale de la courbe, ce qui a pour avantage de préserver le graphisme des surfaces, et l'inconvénient de donner un profil en marches d'escalier à la courbe initiale.
- découper la courbe en plusieurs tranches que l'on superposera, ce qui a pour avantage de préserver intégralement le profil de la courbe initiale, et l'inconvénient d'engendrer des courbes parasites qui nuisent à la perception du graphisme de départ.

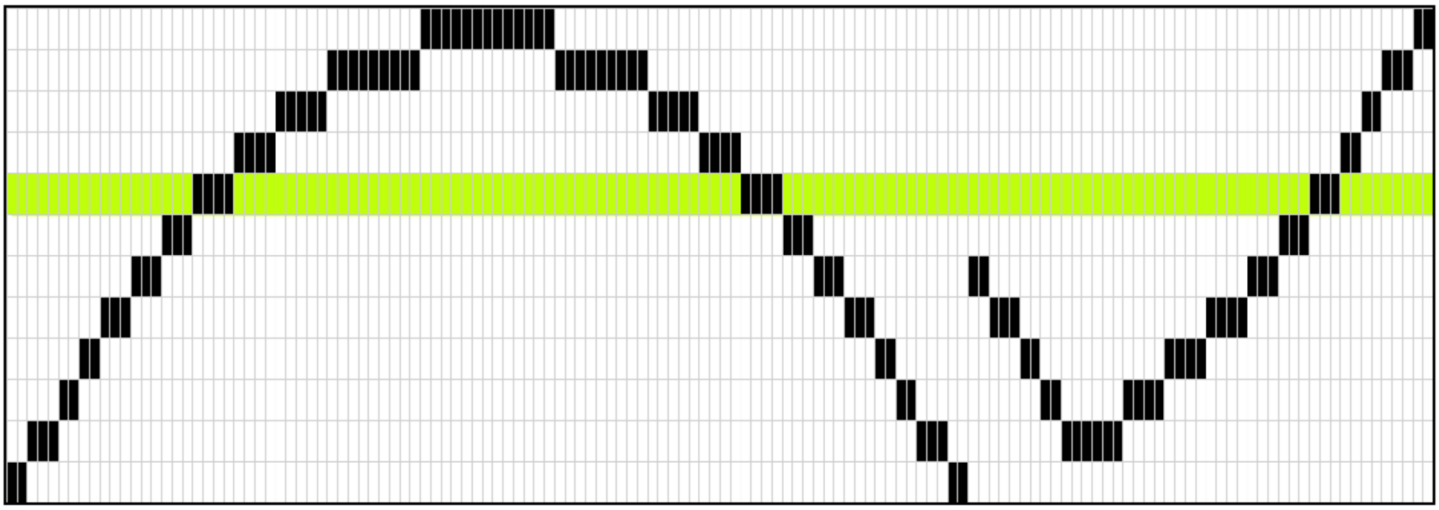
Commençons par la première famille de solutions.



Ce tissu a un rentrage de 48 cadres. Comment le réduire à 12 ? ... Il suffit de diviser par quatre !

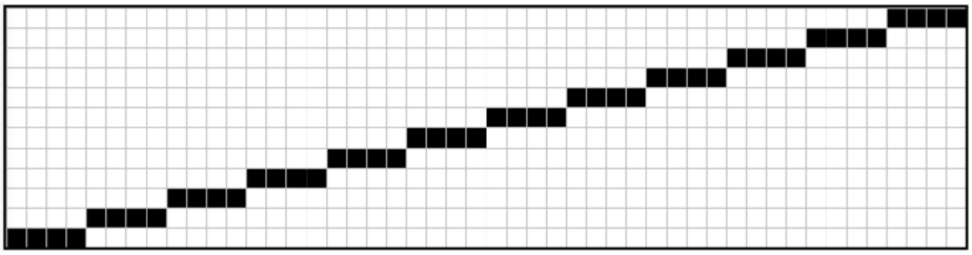
Construisons à partir de ce rentrage R un nouveau rentrage R' : faisons dans le rentrage R des paquets de quatre cadres et mettons tous les fils de ces quatre cadres sur un seul du rentrage R'.





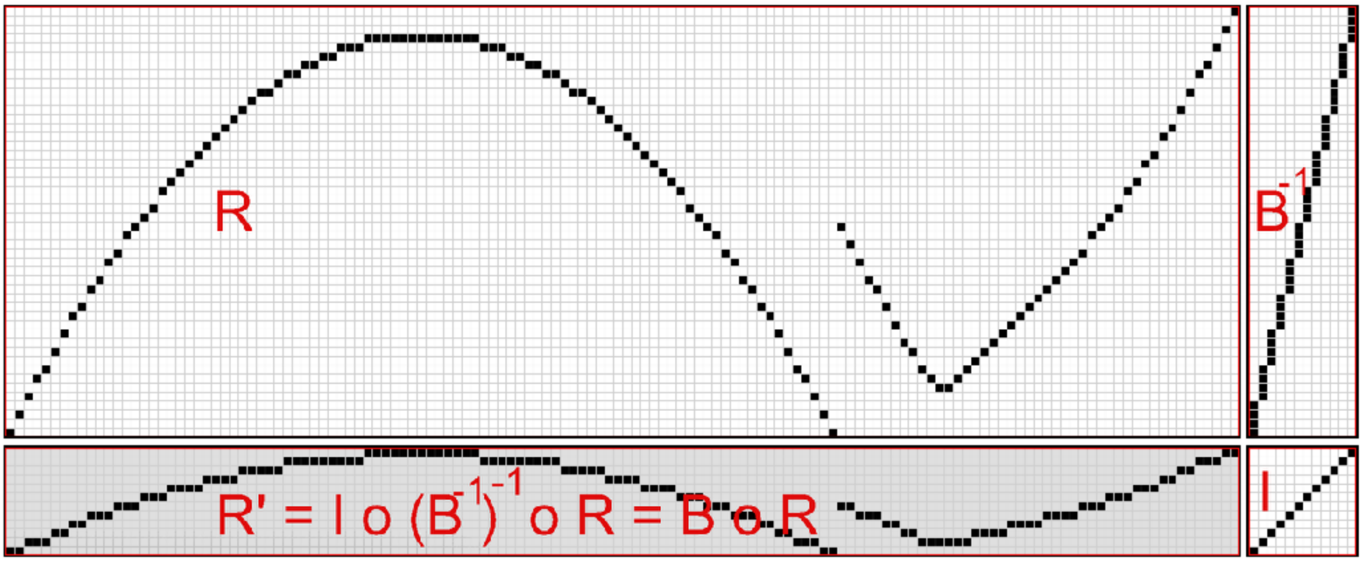
Les fils de 4 cadres sur fond vert, au-dessus, sont regroupés sur un seul cadre, en dessous

Comme pour l'amalgamage représentons cette transformation par un calcul :
Appelons B la relation qui permet de passer du rentrage R au rentrage R'. Le premier paquet de quatre cadres de R , les cadres 1, 2. 3 et 4 seront associés au cadre 1 de R'. Les quatre suivants au cadre 2 et ainsi de suite. Dans les quatre premières colonnes de B on cochera une case sur la ligne 1, dans les quatre colonnes suivantes on cochera sur la ligne 2 et ainsi de suite. B est une diagonale étirée formée de petits segments horizontaux de quatre cases.



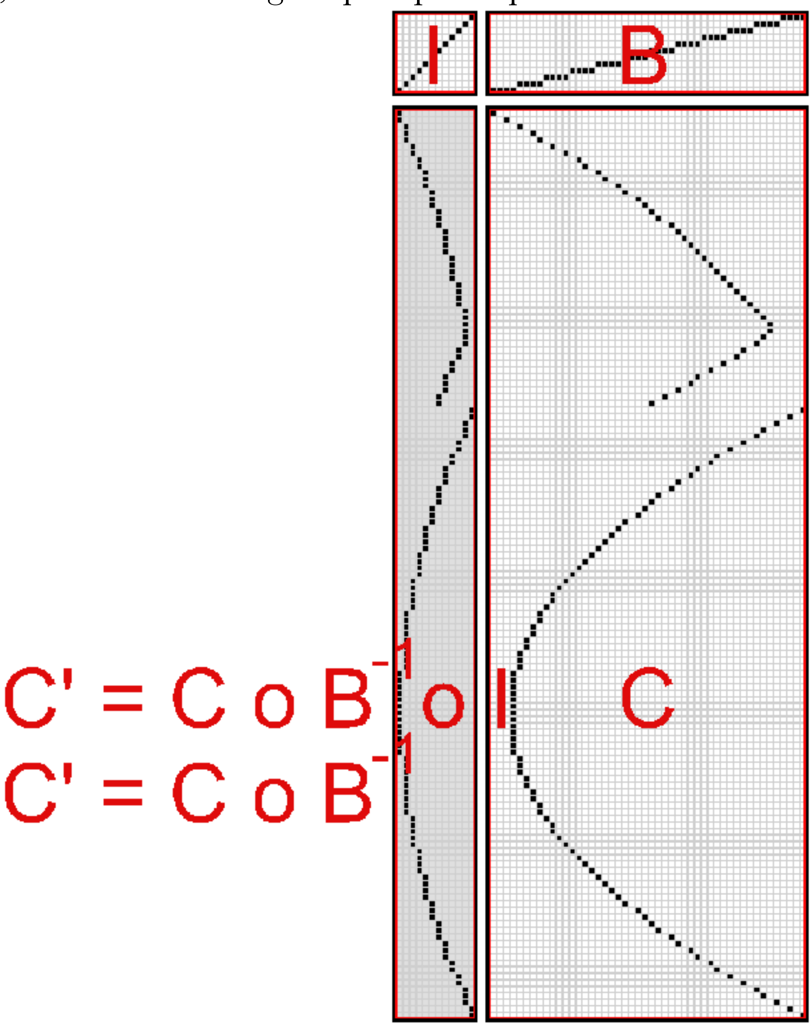
Chacun des cadres de R est associé à un cadre de R' et à un seul : la relation B est une application.
Des cadres du rentrage R différents sont associés à un même cadre de R' : la relation B n'est pas injective.
Contrairement aux bases de réarrangement cette relation n'est pas une bijection ; elle est rectangulaire. B est plus large que haute et possède la propriété d'un rentrage : c'est une application.
La relation sert ici à réduire la définition, c.-à-d. à digitaliser le rentrage R :

Nous appellerons l'application B une base de digitalisation.



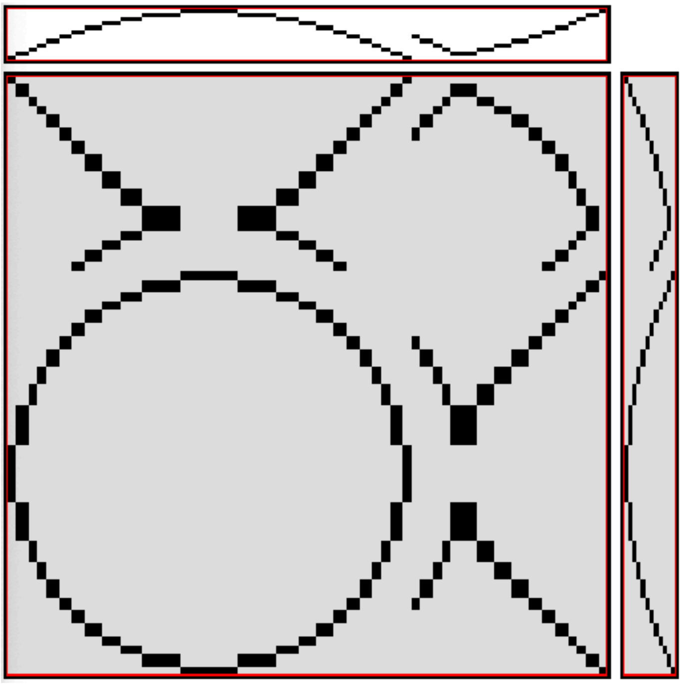
R' se déduit de R par la formule R' = B o R. Ce calcul est présenté en considérant la réciproque B^{-1} de B comme un attachage : R' = B o R = I o $(B^{-1})^{-1}$ o R

Pour amalgamer un tissu, après avoir amalgamé le rentrage, nous avions cherché comment transformer le carton de manière à retrouver le tissu initial. Ici, les rentrages R et R' ne sont pas équivalents car R' est le produit de R par une application et non par une bijection. R' ne peut produire tous les tissus que peut produire R. R' ne peut même pas être tissé avec le carton C car R' et R n'ont pas le même nombre de cadres. Notre but ici est de construire un nouveau tissu, que nous appellerons T' , qui comporte quatre fois moins de cadres que le tissu initial T= C o R. Nous avons le rentrage R' sur quatre fois moins de cadres , réduisons de la même manière le nombre de pédales du carton C, en divisant sa largeur par quatre pour obtenir le nouveau carton C'.



Nous passons du carton C au carton C' par la formule :
C' = C o B^{-1} o I
C' = C o B^{-1}

Avec le rentrage R' et le carton C' nous obtenons le nouveau tissu digitalisé T' = C' o R' :

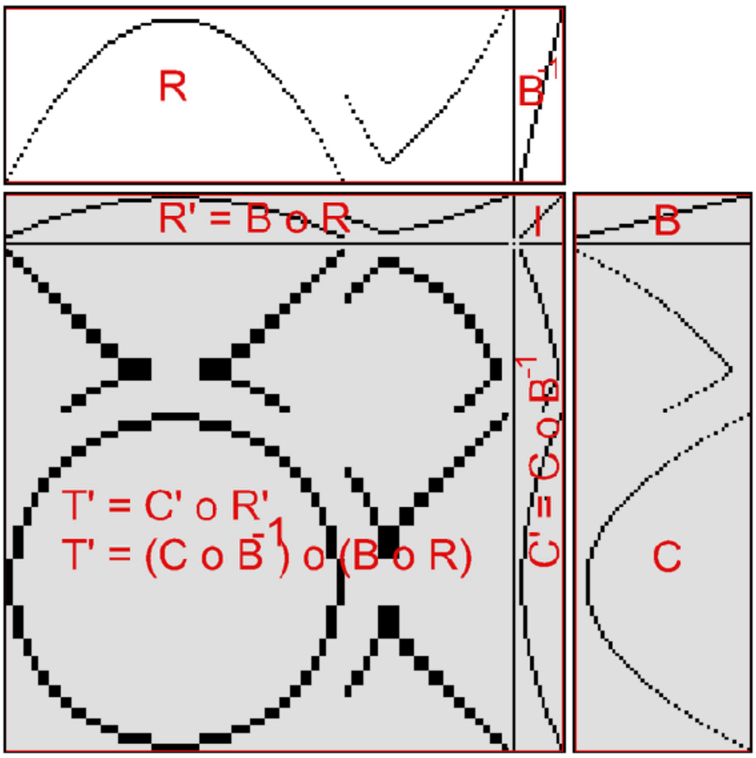


T' = C' o R'

Le tissu T' a 12 cadres et 12 pédales, sa ligne graphique est la même que celle du tissu initial T, mais sa définition quatre fois plus faible lui donne un profil en marches d'escalier.

Vous êtes maintenant familiarisé avec les diagrammes multiples, et, à ce stade, il est naturel que vous vous posiez cette question : comment passer automatiquement du diagramme du tissu initial Tau tissu digitalisé T' ?

Réunissons les deux diagrammes de calcul du nouveau rentrage R' et du nouveau carton C' en confondant leur case I :

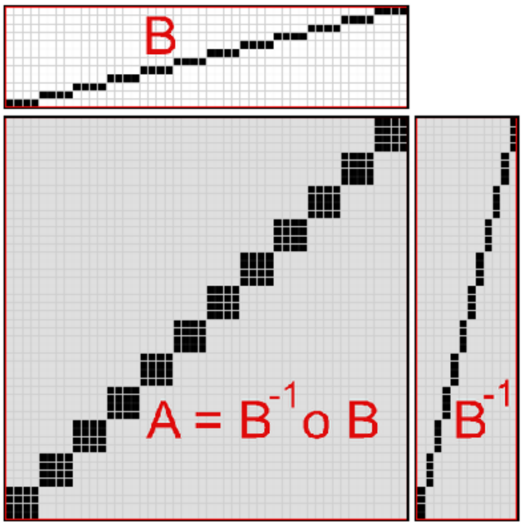


Comment choisir l'attachage manquant dans le coin haut gauche pour que le calcul du diagramme de tissu, portant sur les cases extérieures C et R donne le tissu T' comme résultat ? Si on appelle A cet attachage, le tissu s'écrit : $T' = C \circ A^{-1} \circ R$

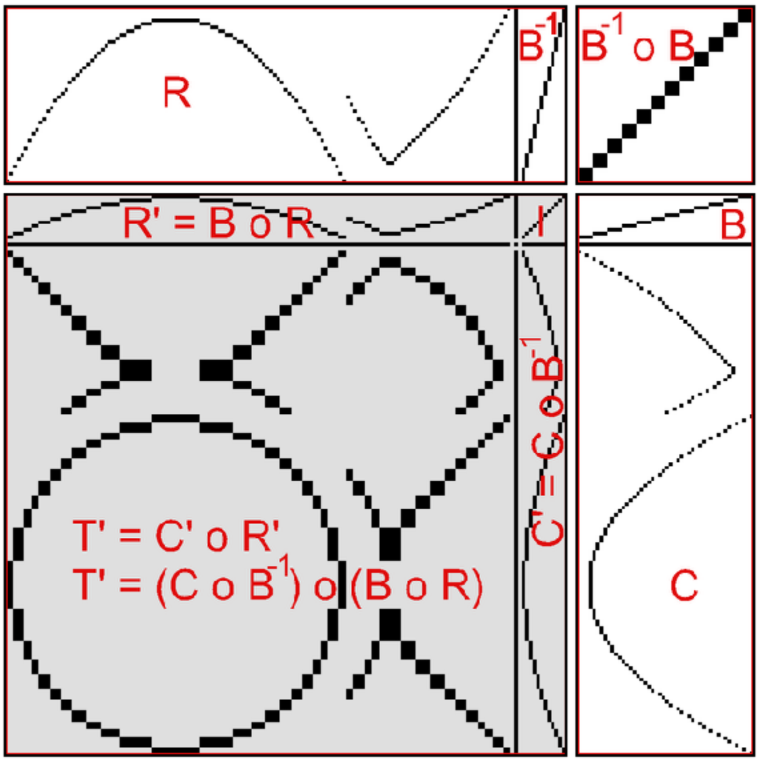
Le tissu T' s'écrit :

$T' = C' \circ R'$
$T' = (C \circ B^{-1}) \circ (B \circ R)$
$T' = C \circ (B^{-1} \circ B) \circ R$
$T' = C \circ (B^{-1} \circ B)^{-1} \circ R$ nous avons montré que $B^{-1} \circ B$ est symétrique (et contient I)
Si on pose $A = B^{-1} \circ B$ on a bien $T' = C \circ A^{-1} \circ R$

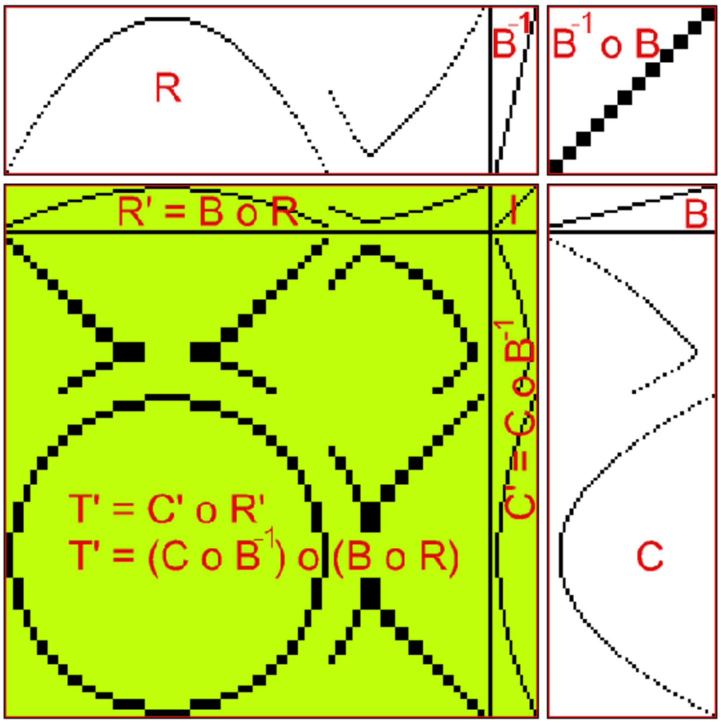
B est une application non bijective et $B^{-1} \circ B$ est en général différent de I. $B^{-1} \circ B$ est l'"axiale de remettage" de B (voir Première partie, B, 9, b)).
Nous dirons plus simplement que B est l'axiale de la base B .



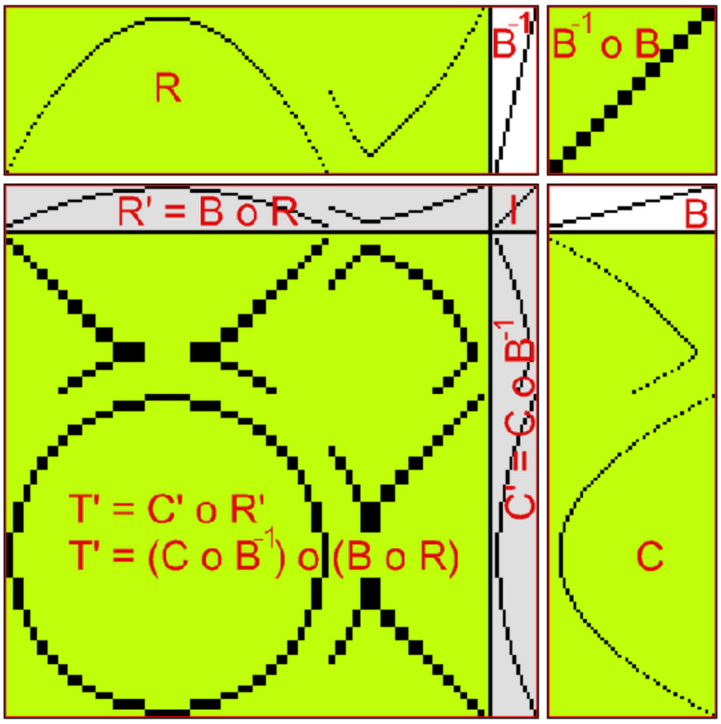
Nous savons que l'axiale B contient I et est symétrique par rapport à elle.
Pour cette base de digitalisation, la diagonale I est entourée de pavés 4 X 4 .



Maintenant que nous avons complété notre diagramme multiple, voyons s'il fonctionne correctement.



T' = C' o R'
Ce calcul du tissu T' , est une lecture possible dans le diagramme multiple, il n'est pas fait par l'ordinateur à partir de C' et de R'.

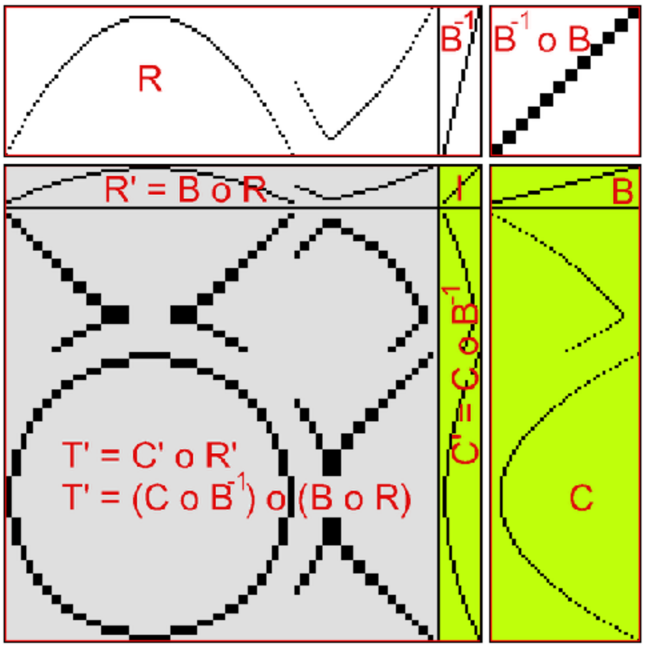


T''= C o $(B^{-1}$ o $B)^{-1}$ o R
T'' = C o B^{-1} o $(B^{-1})^{-1}$ o R
T'' = C o B^{-1} o B o R
T'' = (C o B^{-1}) o (B o R)
T'' = C' o R'
T'' =T
Ce calcul de T'' est fait par l'ordinateur, quand on représente le diagramme multiple par un seul tissu (les diagrammes verts).

Il y a deux manières équivalentes de voir le tissu digitalisé T' :
- à partir du rentrage de départ R , du carton de départ C et de l'attachage (B^{-1} o B),
- ou à partir du carton digitalisé C' et du rentrage digitalisé R'.

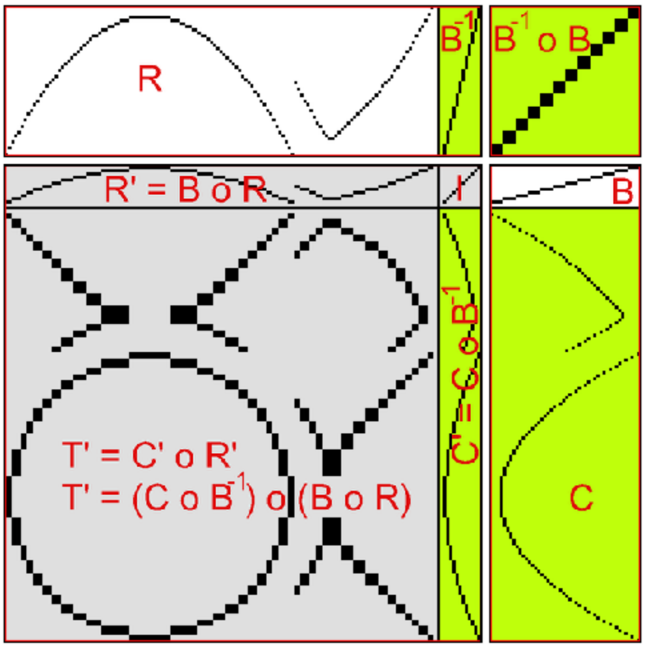
C'est l'intérêt du diagramme multiple de montrer que les deux calculs sont équivalents.
Le tissu T' = C' o R' est sur 12 cadres, au lieu de 48 pour T = C o R .
De plus T' ⊂ T , T contient le graphisme de T , plus des harmoniques dues au regroupement de certains cadres en un seul.

De plus, les deux calculs de C' et les deux calculs de R' suivants sont bien équivalents :



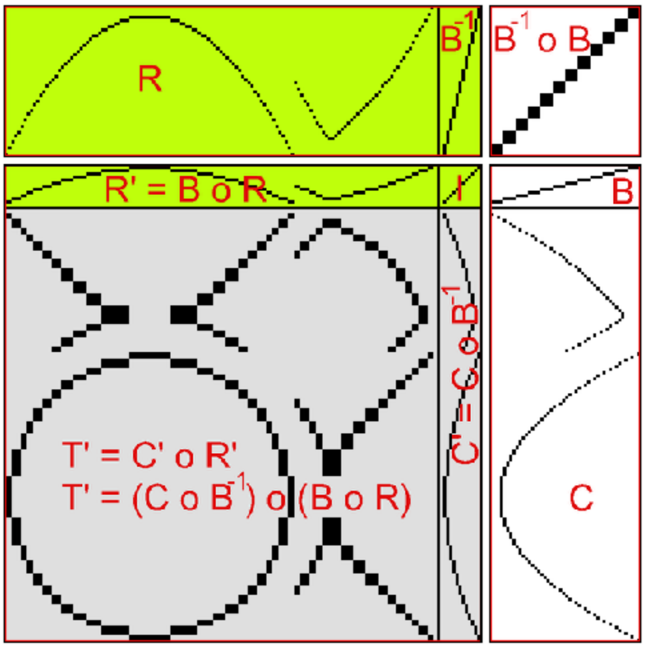
$C' = C \circ B^{-1} \circ I$
$C' = C \circ B^{-1}$

Ce calcul du carton C' , est une lecture possible dans le diagramme multiple, il n'est pas fait par l'ordinateur.



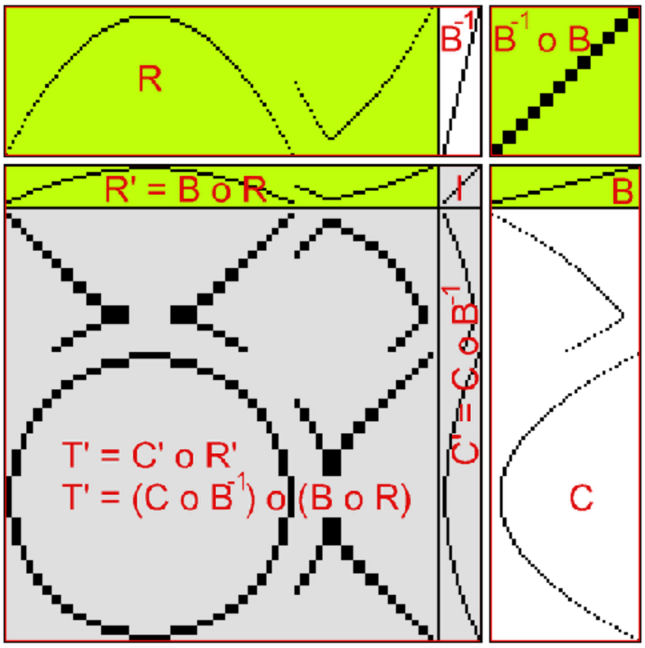
$C' = C \circ (B^{-1} \circ B)^{-1} \circ B^{-1}$
$C' = C \circ B^{-1} \circ (B^{-1})^{-1} \circ B^{-1}$
$C' = C \circ B^{-1} \circ B \circ B^{-1}$
$C' = C \circ B^{-1} \circ I$ car B est une application
$C' = C \circ B^{-1}$

Ce calcul de C' est fait par l'ordinateur.



$R' = I \circ (B^{-1})^{-1} \circ R$
$R' = I \circ B \circ R$
$R' = B \circ R$

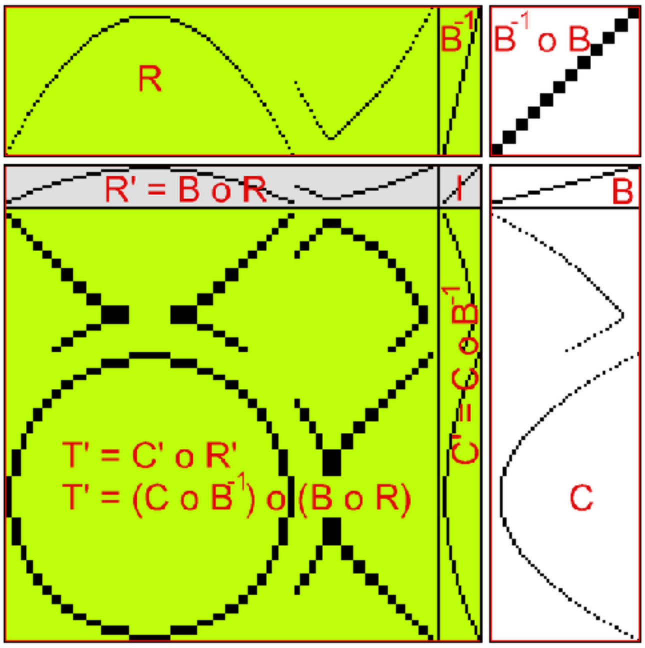
Ce calcul du rentrage R' , est une lecture possible dans le diagramme multiple, il n'est pas fait par l'ordinateur.



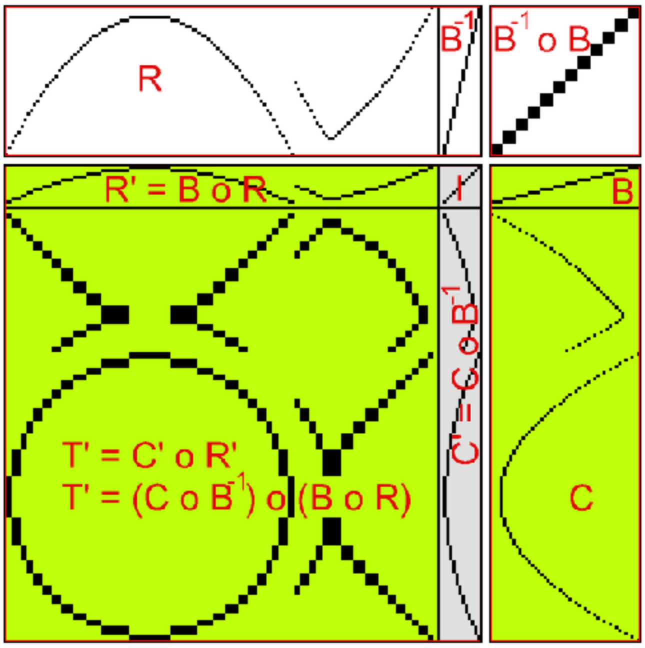
$R' = B \circ (B^{-1} \circ B)^{-1} \circ R$
$R' = B \circ B^{-1} \circ (B^{-1})^{-1} \circ R$
$R' = B \circ B^{-1} \circ B \circ R$
$R' = I \circ B \circ R$ car B est une application
$R' = B \circ R$

Ce calcul de R' est fait par l'ordinateur.

On peut lire deux autres calculs annexe du tissu T' :



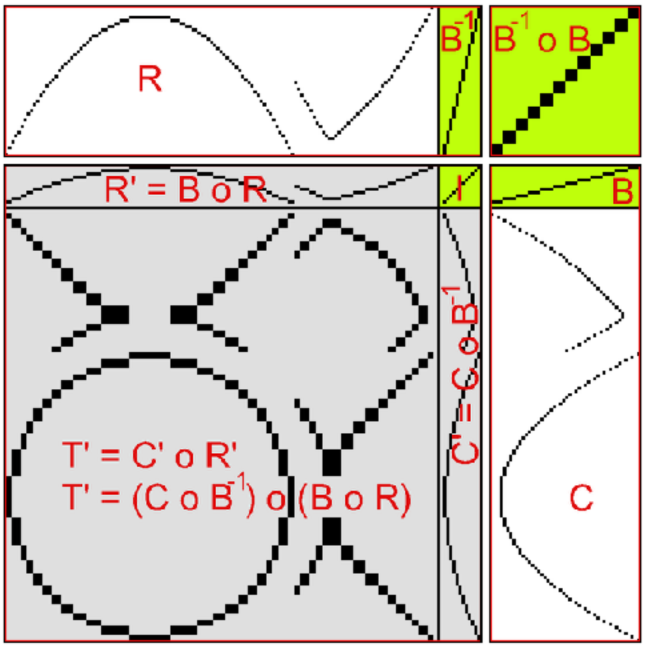
$T' = C' \circ (B^{-1})^{-1} \circ R$
$T' = C' \circ B \circ R$
$T' = C' \circ R'$
Ce calcul du tissu T' , est une lecture possible dans le diagramme multiple, il n'est pas fait par l'ordinateur.



$T' = C \circ B^{-1} \circ R'$
$T' = C' \circ R'$

Ce calcul du tissu T' , est une lecture possible dans le diagramme multiple, il n'est pas fait par l'ordinateur.

Dans le coin haut droit on retrouve les éléments qui définissent le télescopage ; B , B^{-1} et $B^{-1} \circ B$:



$I = B \circ (B^{-1} \circ B)^{-1} \circ B^{-1}$
$I = B \circ B^{-1} \circ (B^{-1})^{-1} \circ B^{-1}$
$I = B \circ B^{-1} \circ B \circ B^{-1}$
$I = I \circ I$ car B est une application
$I = I$

Ce calcul de I est fait par l'ordinateur ; il est juste dans le diagramme multiple.

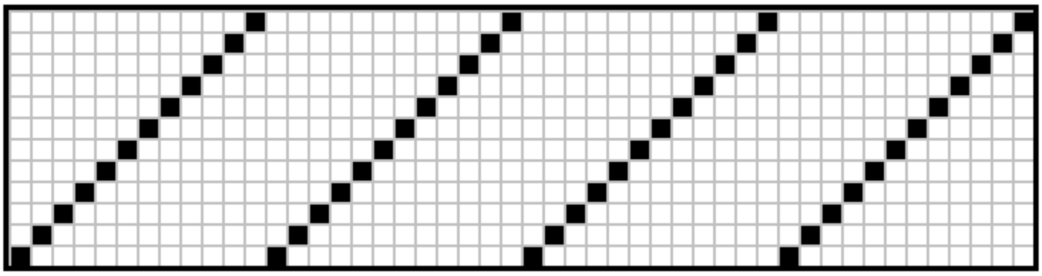
Cependant pour construire le diagramme multiple, on commence par calculer de l'attachage $B^{-1} \circ B$ dans un petit tissu annexe.

Pratiquement pour passer automatiquement du diagramme d'un tissu à son diagramme digitalisé par la base B, nous procéderons de la manière suivante :

- calcul de l'axiale B^{-1} o B de la base de digitalisation B qui sera prise comme attachage
- construction d'une marchure composite comprenant le carton C surmontée de la base B
- construction d'un rentrage composite comprenant le rentrage R prolongé à droite de la réciproque B^{-1} de la base.
- calcul du diagramme multiple de digitalisation.

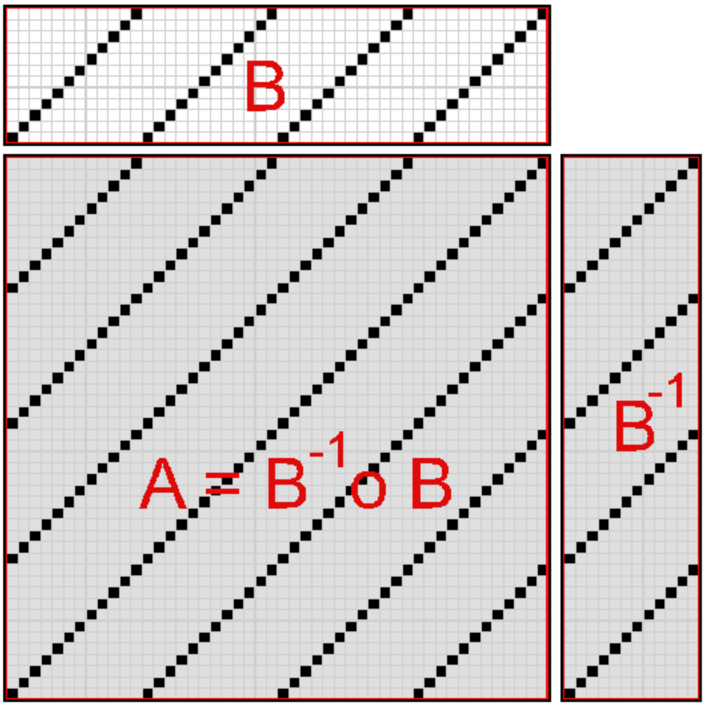
Nous aurons ainsi, sur un même diagramme, le rentrage et le carton du tissu initial, et le tissu digitalisé.

Prenons un autre exemple dans la deuxième famille de solutions évoquées au début de ce chapitre. Avec quelle base découper un rentrage en tranches ? Nous savons qu'un rapport suivi reproduit un diagramme ; pour reproduire quatre tranches de 12 cadres, il suffit d'utiliser une base formée de quatre rapports suivis de 12 carreaux :

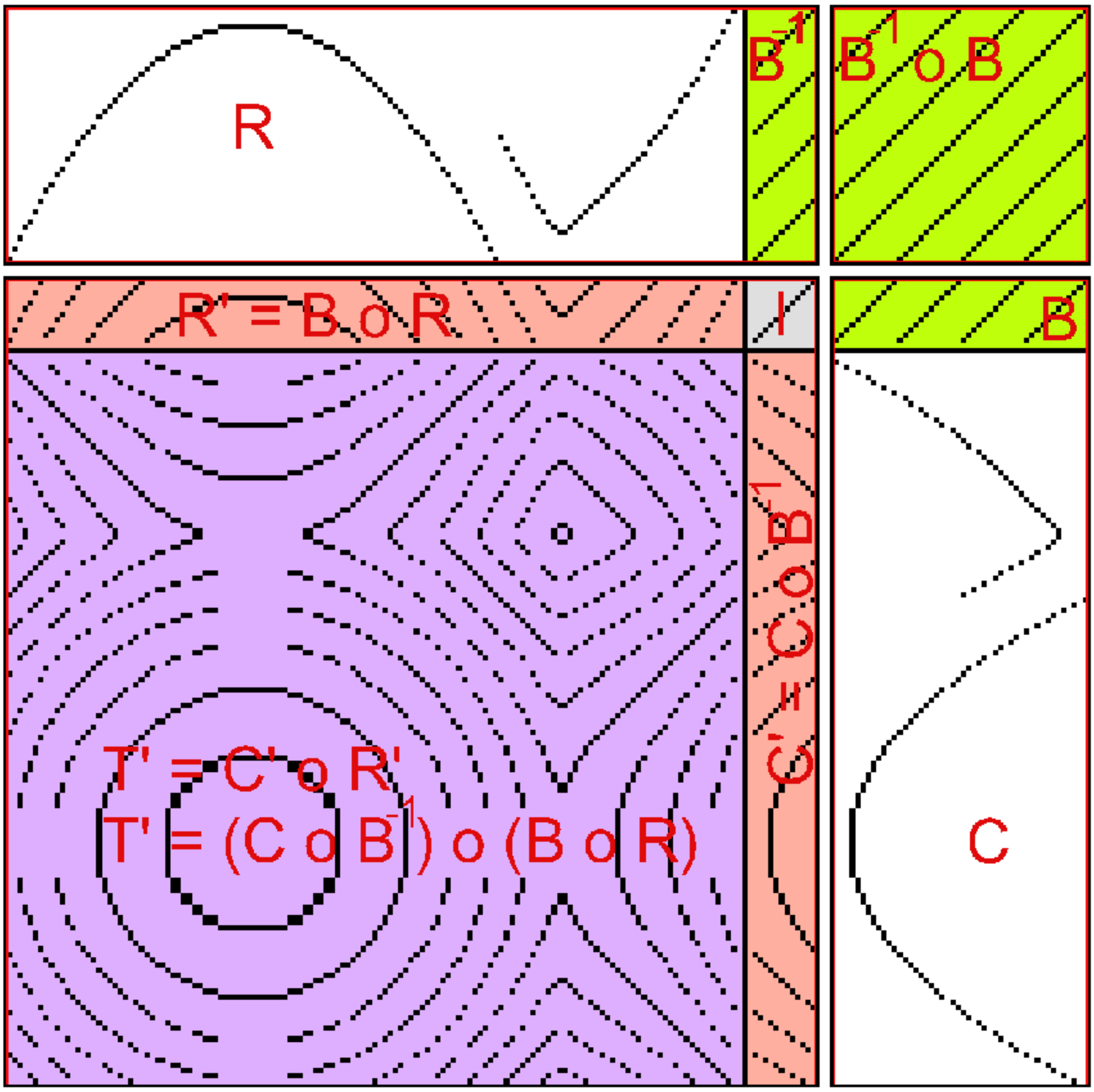


La nouvelle base B

Calculons l'axiale-de cette base B^{-1} o B :



Il suffit maintenant de remplacer dans le tissu multiple, les 3 éléments sur fond vert : B en haut du carton, B^{-1} à droite du rentrage et l'attachage par B^{-1} o B pour obtenir le diagramme multiple de télescopage :



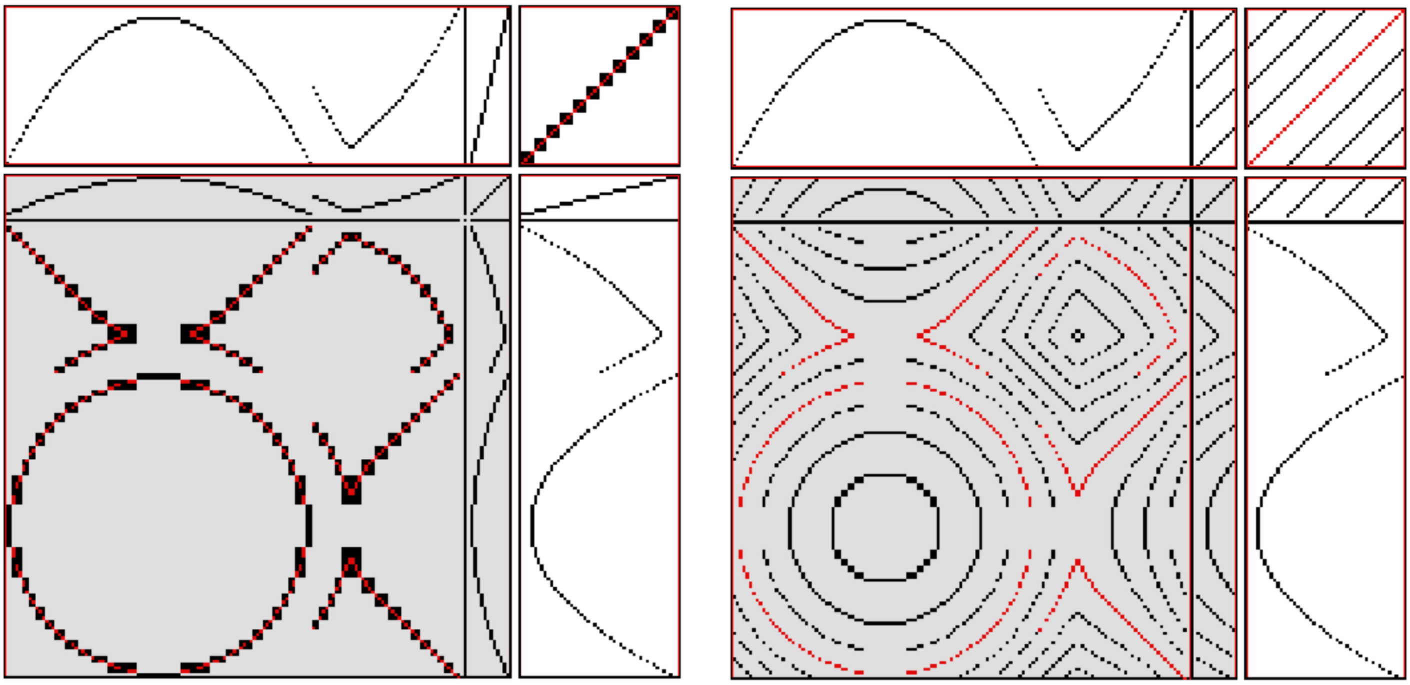
Le résultat du calcul nous donne le rentrage télescopé R' , le carton télescopé C' sur fond saumon, et le tissu télescopé T' sur fond violet.

Les cadres de R ont été empilés les uns sur les autres en 12 paquets de 4 , à la manière des tubes d'un télescope ; c'est pourquoi nous appellerons B une base de télescopage.

Remarque :
Nous avons construit le diagramme multiple comme un seul tissu, en utilisant un artifice pour inclure B en haut du carton, B^{-1} à droite du rentrage. Cet artifice permet à tout utilisateur possédant un logiciel calculant un tissu avec attachage, de construire des diagrammes multiples.

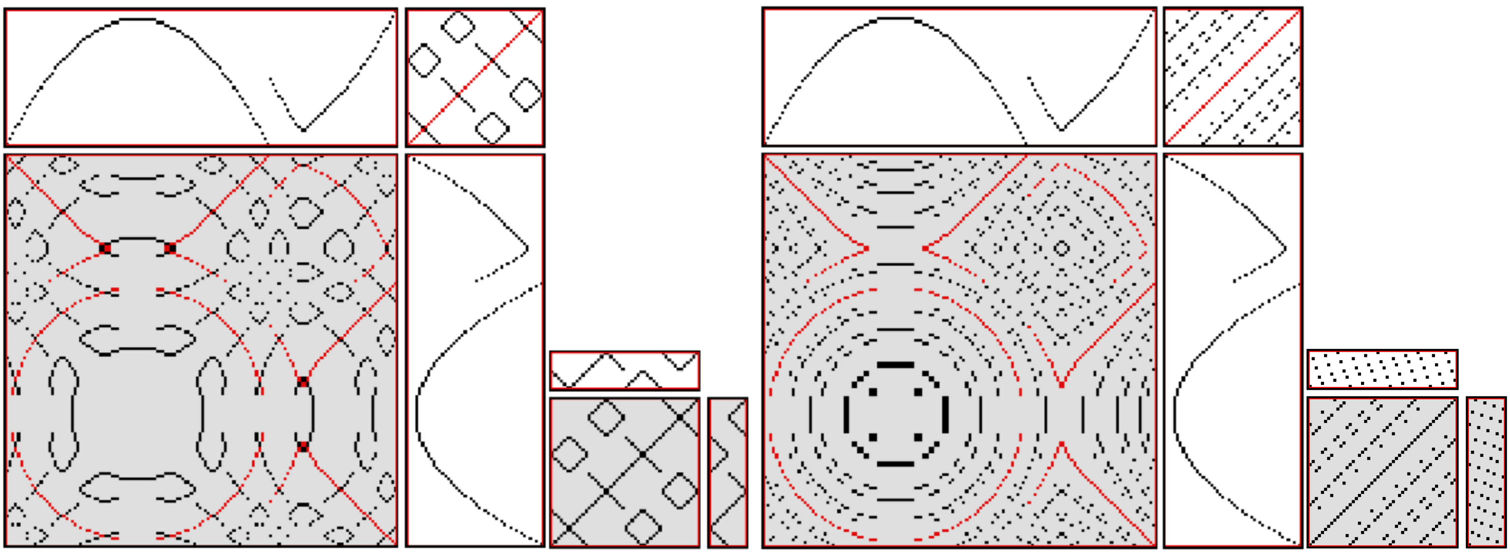
Il existe une version du logiciel Pointcarré, Mac OS Carbon où B, B^{-1}, R' et C' et sont des diagrammes supplémentaires autonomes. Il suffit alors de définir B pour que tous les calculs des autres diagrammes soient alors pris en charge automatiquement par Pointcarré.
Cette version n'a malheureusement jamais été commercialisée.

L'attachage comme composition de la base B suivie de sa réciproque B^{-1}, contient toujours l'identité I. Il en résulte que le tissu de départ T = C o B^{-1} o R, affiché en rouge, est inclus dans T' .



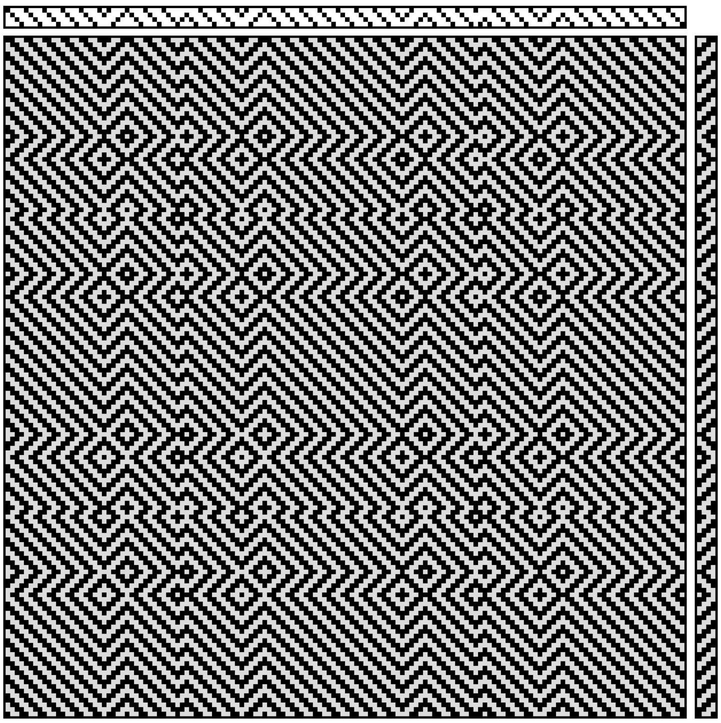
Le tissu télescopé contient intégralement la courbe du tissu initial, en rouge, mais des courbes parasites s'y sont surajoutées.
Nous appellerons ces courbes parasites des harmoniques de télescopage, dans le sens qu'elles résonnent autour de la courbe initiale. Le choix de la base de télescopage permet la maîtrise de la répartition spatiale de ces harmoniques, qui peuvent alors souligner ou masquer la courbe initiale. La discussion de ce choix est l'objet de la partie B de cette seconde partie.

Notez que chaque tissu T' est défini uniquement par un attachage différent. Toutes les bases équivalentes à B donnent le même attachage B^{-1} o B . Pour la recherche des harmoniques ont pourra travailler sur le tissu de départ, avec en plus seulement un attachage, et un tissu calculant l'attachage B^{-1} o B.
Une fois les harmoniques au point, on pourra calculer les rentrage et carton télescopés R' et C'.

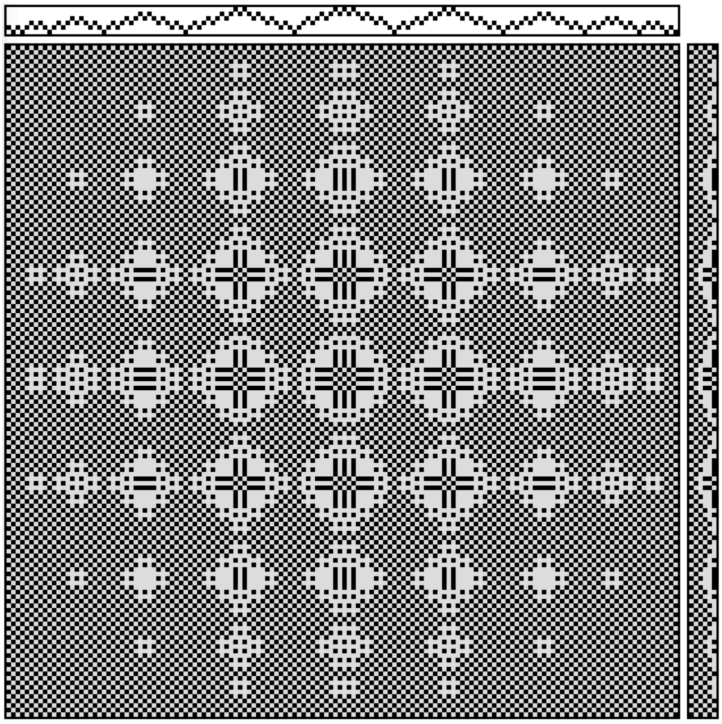


Transformations augmentant la dimension du diagramme
Combinaisons de diagrammes.

Notre discussion sur les tissus symétriques par rapport à la première diagonale a mis évidence l'importance du rentrage dans les caractéristiques graphiques d'un tissu. Les possibilités d'un rentrage varient entre deux extrêmes : d'un côté les rentrages simples dérivés d'un rentrage suivi, de l'autre les rentrages complexes construits à partir d'une courbe graphique.
- Un rentrage suivi est capable d'engendrer une très grande variété de tissus, mais le rapport reste limité au nombre de lames, c.-à-d. à très peu de choses.
- Un rentrage complexe est capable de produire un graphisme de grand rapport, mais, quoiqu'il soit possible de faire varier le graphisme pour lequel le rentrage a été construit, tous les tissus tissés avec ce rentrage auront un air de famille, quant à leurs graphismes.
En somme les rentrages sont pris dans le dilemme suivant : simplicité et universalité, contre complexité et spécificité. Comment dans ces conditions produire un tissu comportant deux graphismes très différents de grands rapports ? L'idée de départ est simple : partons de deux tissus connus, comportant chacun un rentrage complexe produisant un graphisme spécifique, et essayons de construire un nouveau rentrage capable de simuler indifféremment l'un ou l'autre de ces deux rentrages.
Considérons donc deux tissus, du type "carton-rentrage", $T_1 = C_1 \circ R_1$ et $T_2 = C_2 \circ R_2$. Le rentrage R_1 a quatre cadres et le rentrage R_2 en a six ; tous deux ont la même largeur.



$T_1 = C_1 \circ R_1$



$T_2 = C_2 \circ R_2$

Qu'est-ce qu'un rentrage ... un ensemble de cadres qui chacun porte un ensemble de fils. Construire un rentrage R qui puisse simuler à la fois R_1 et R_2 , c'est rechercher un ensemble de cadres susceptibles de produire tous les arrangements de fils possibles avec R_1 et avec R_2.

Construisons l'ensemble de cadres suivant :

> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 1 de R_1 et dans le cadre 1 de R_2.
> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 1 de R_1 et dans le cadre 2 de R_2.
> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 1 de R_1 et dans le cadre 3 de R_2.
> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 1 de R_1 et dans le cadre 4 de R_2.
> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 1 de R_1 et dans le cadre 5 de R_2.
> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 1 de R_1 et dans le cadre 6 de R_2.

Considérons l'ensemble des fils de la chaîne. R_2 et R_1 étant des rentrages de même largeur, chaque fil de la chaîne est rentré dans un cadre et une seul de R_1 et dans un cadre et un seul de R_2. En particulier chaque fil rentré dans le cadre 1 de R_1 est rentré dans l'un des cadres de R_2. Comme nous avons passé en revue tous les cadres de R_2, on peut affirmer que chaque fil du cadre 1 de R_1 se trouve rentré dans l'un des cadres de l'ensemble que nous venons de construire. Si on lève l'ensemble de tous ces cadres en même temps, les fils levés seront donc les mêmes que ceux qu'aurait levé le cadre 1 de R_1 à lui tout seul ; cet ensemble de cadres est capable de simuler l'action du cadre 1 de R_1. Si l'on construit un deuxième ensemble de cadres sur le même modèle, mais avec le cadre 2 de R_1, cet ensemble sera capable de simuler le cadre 2 de R_1. Si l'on construit autant d'ensembles de cadres de ce type qu'il existe de cadre dans R_1, nous serons capables de simuler l'action de tous les cadres de R_1, c.-à-d. de simuler le rentrage R_1 tout entier. En effet l'ensemble de tous les cadres de tous ces ensembles de cadres forme bien un rentrage : chaque fil de la chaîne étant rentré dans un et un seul cadre de R_1 sera rentré dans un et un seul des ensembles de cadres que nous avons construits ; de plus dans chacun de ces ensembles de cadres, chaque fil est rentré dans un seul des cadres car il est rentré dans un et seul cadre de R_2.
Que faudrait-il faire pour pouvoir simuler le rentrage R_2 ? La même chose, mais en renversant les rôles de R_1 et de R_2 ! Il est clair que ce nouvel ensemble de cadres comporterait exactement les mêmes cadres, mais arrangés dans un ordre différent.
Par exemple, pour simuler l'action du cadre 1 de R_2 il suffirait de lever ensemble les cadres suivants :

> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 1 de R_1 et dans le cadre 1 de R_2.
> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 2 de R_1 et dans le cadre 1 de R_2.
> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 3 de R_1 et dans le cadre 1 de R_2.
> Un cadre qui contient les fils rentrés à la fois dans le cadre 4 de R_1 et dans le cadre 1 de R_2.

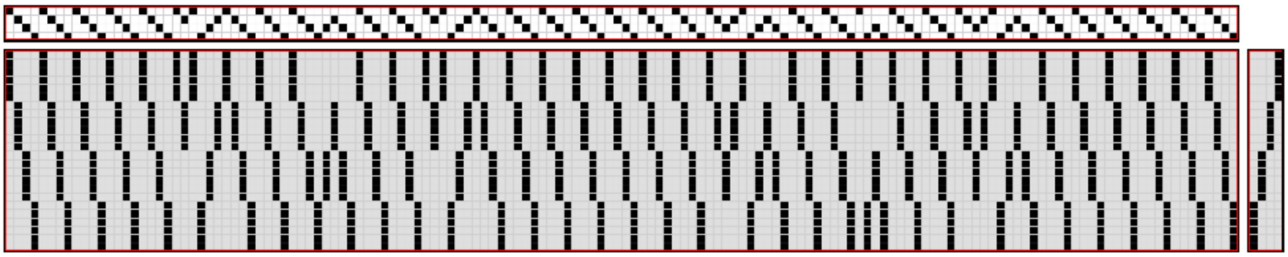
Chacun de ces cadres est le même que le premier cadre de chacun des ensembles de cadres que nous avions construits pour simuler R_1.

Tous ces cadres construits sont constitués de fils rentrés à la fois sur l'un des cadres de R_1, et sur l'un des cadres de R_2. Graphiquement dire que ces fils appartiennent à la fois à l'un et à l'autre de ces cadres, c'est dire qu'ils appartiennent à l'intersection de ces cadres.
Le rentrage R , capable de simuler à la fois le rentrage R_1 et le rentrage R_2, aura comme cadres toutes les intersections possibles entre un cadre de R_1 et un cadre de R_2. Le nombre des intersections possibles est égal au nombre de cadres de R_1 multiplié par le nombre de cadres de R_2.

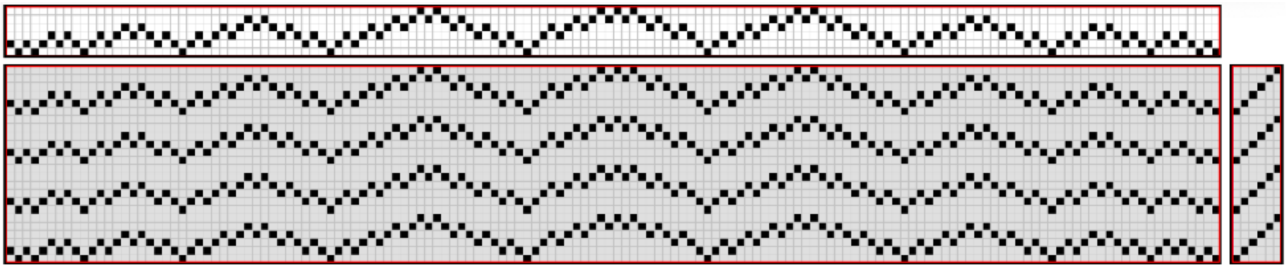
Dans notre exemple R aura donc 24 cadres, formés des intersections suivantes :

Cadres de R_1	Cadres de R_2
cadre 1	cadre 1
cadre 1	cadre 2
cadre 1	cadre 3
cadre 1	cadre 4
cadre 1	cadre 5
cadre 1	cadre 6
cadre 2	cadre 1
cadre 2	cadre 2
cadre 2	cadre 3
cadre 2	cadre 4
cadre 2	cadre 5
cadre 2	cadre 6
cadre 3	cadre 1
cadre 3	cadre 2
cadre 3	cadre 3
cadre 3	cadre 4
cadre 3	cadre 5
cadre 3	cadre 6
cadre 4	cadre 1
cadre 4	cadre 2
cadre 4	cadre 3
cadre 4	cadre 4
cadre 4	cadre 5
cadre 4	cadre 6
Rentrage R'_1	Rentrage R'_2

Plutôt que de réaliser toutes ces intersections de cadres une par une et de les regrouper ensuite pour former le rentrage R, nous allons construire deux rentrages R'_1 et R'_2 à partir de R_1 et de R_2, regroupant d'un côté tous les cadres de R_1 et de l'autre tous les cadres de R_2 en suivant la disposition ci-dessus ; ensuite nous ferons globalement l'intersection des diagrammes de R'_1, et de R'_2 pour obtenir le rentrage R. Pour respecter l'habitude de numéroter les cadres de bas en haut, nous empilerons en fait les cadres dans l'ordre inverse.
Fidèle à notre habitude, nous allons utiliser deux nouvelles bases B_1 et B_2 pour passer de R_1 à R'_1 et de R_2 à R'_2 à l'aide d'un calcul automatique de diagramme de tissus :



$R'_1 = B_1 \circ R_1$

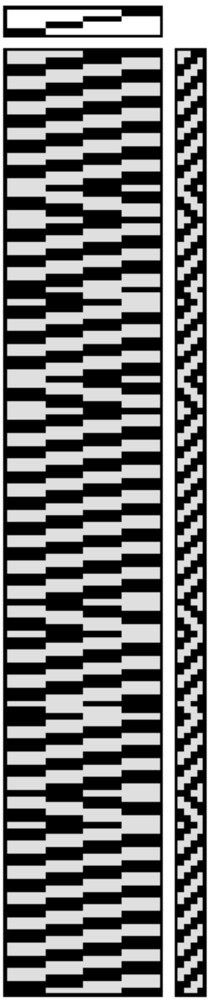


$R'_2 = B_2 \circ R_2$

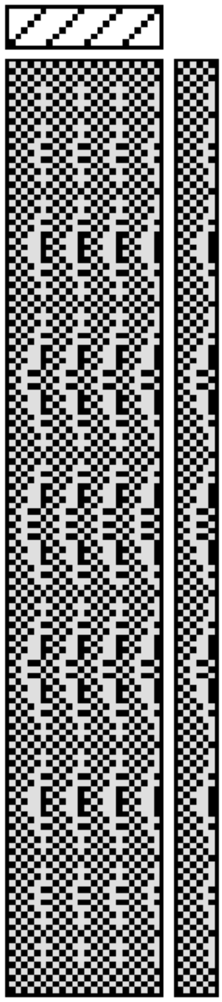
La base B_1 pourrait s'appeler une base d'étirement, et la base R_2 une base de répétition. Le point commun à ces bases est qu'elles sont injectives ; elles comportent une croix et une seule par ligne. En effet chaque cadre de R'_1 (ou de R'_2) est la copie d'un seul cadre de R_1 (ou de R_2).
La transformation de R_1, (ou de R_2) en R'_1 (ou en R'_2) s'exprime par la formule $R'_1 = B_1 \circ R_1$, (ou $R'_2 = B_2 \circ R_2$) ; elle augmente le nombre de cadres de R_1 (ou de R_2).

Pour conserver les tissu T_1 et T_2 , calculons les cartons $C'_1 = C_1 \circ B_1^{-1}$ et $C'_2 = C_2 \circ B_2^{-1}$.

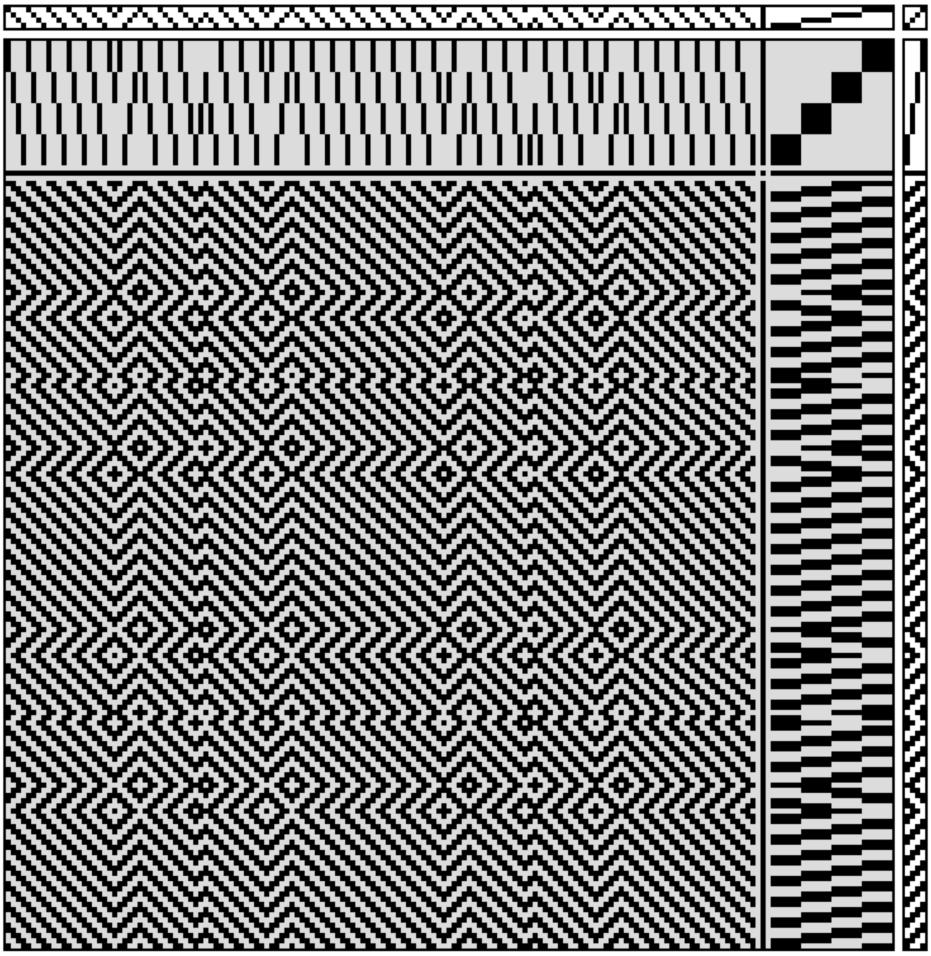
$C'_1 = C_1 \circ B_1^{-1}$

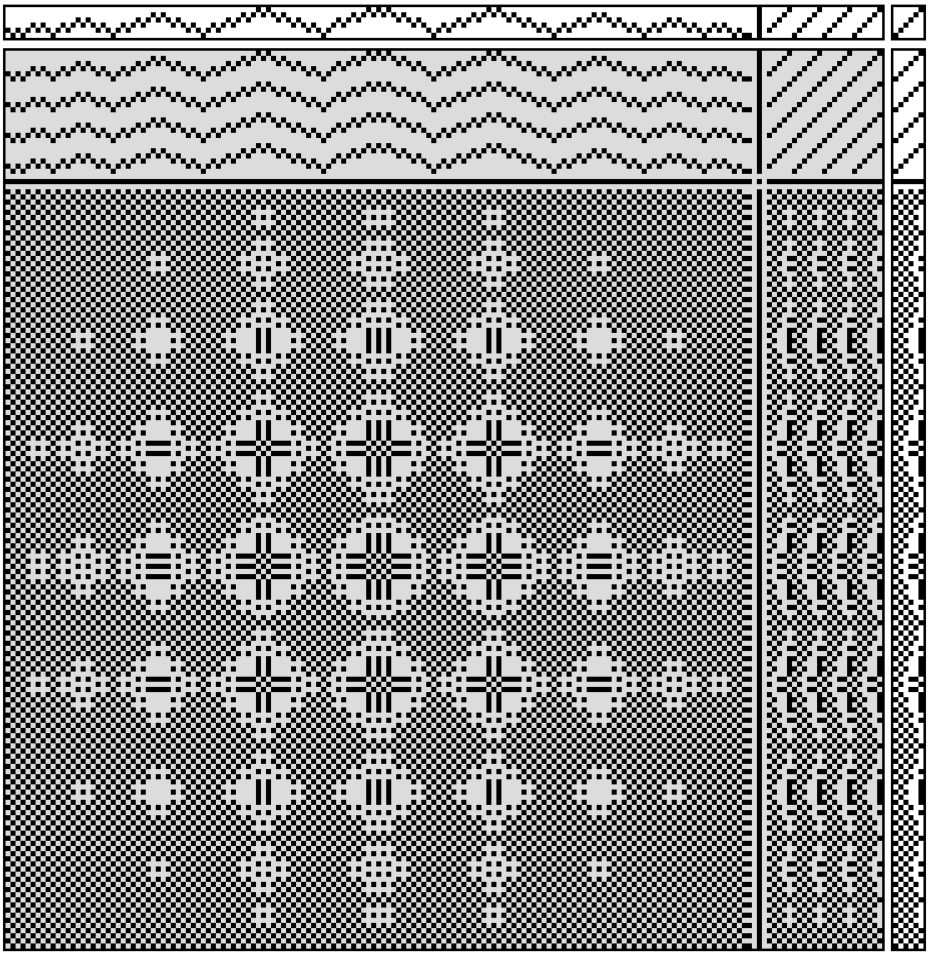


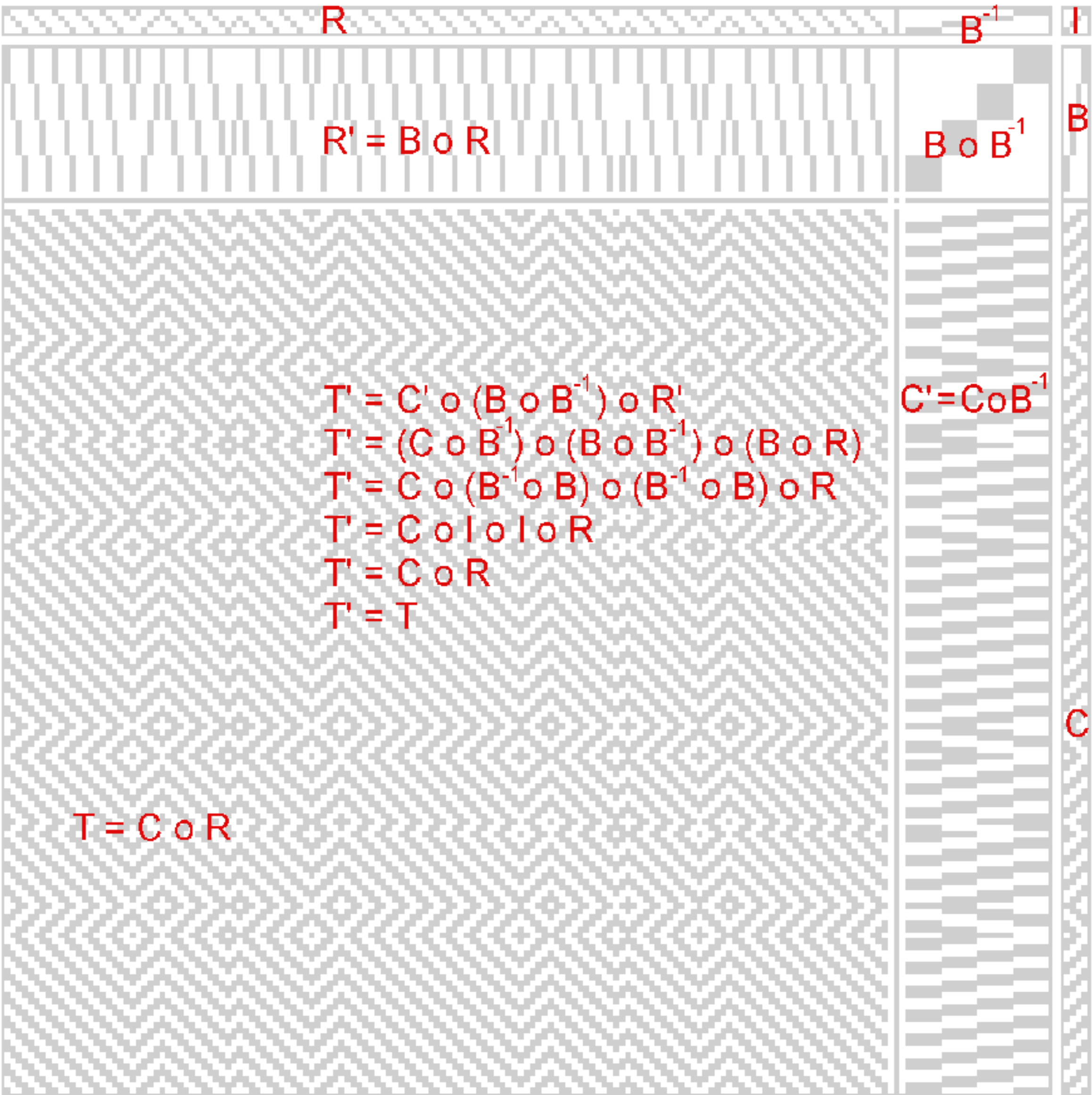
$C'_2 = C_2 \circ B_2^{-1}$



On arrive finalement aux deux diagrammes multiples suivants :







Les calculs de ce diagramme multiple doivent être lus en rajoutant à toutes les lettres, un indice 1 ou 2 , suivant que l'on considère le tissu 1 ou le tissu 2 .
Examinons les quatre calculs fait par l'ordinateur :

- Le calcul du tissu T = C o I^{-1} o R = C o R
- Le produit B o B^{-1}
- Le calcul du carton C' = C o I^{-1} o B^{-1} = C o B^{-1}
- Le calcul du rentrage R' = B o I^{-1} o R = B o R

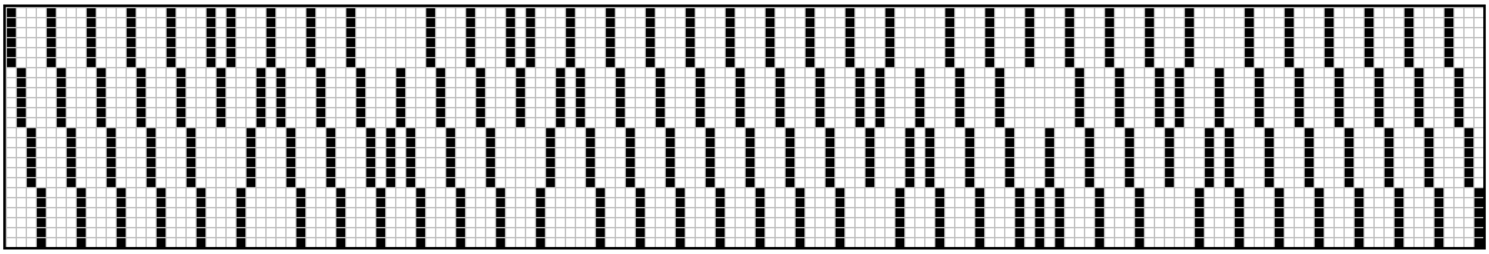
- Dans la partie résultat du diagramme de calcul, nous trouvons en bas à gauche le tissu.
Le calcul fait par l'ordinateur est :
T = C o I^{-1} o R
T = C o R
On peut lire un deuxième calcul de ce tissu, qui est bien équivalent :
T' = C' o (B o B^{-1}) o R'
T' = (C o B^{-1}) o (B o B^{-1}) o (B o R)
T' = C o (B^{-1} o B) o (B^{-1} o B) o R
T' = C o I o I o R B^{-1} o B = I car la base B est injective
T' = C o R
T' = T

- Le calcul fait par l'ordinateur est : $B \circ I^{-1} \circ B^{-1} = B \circ B^{-1}$

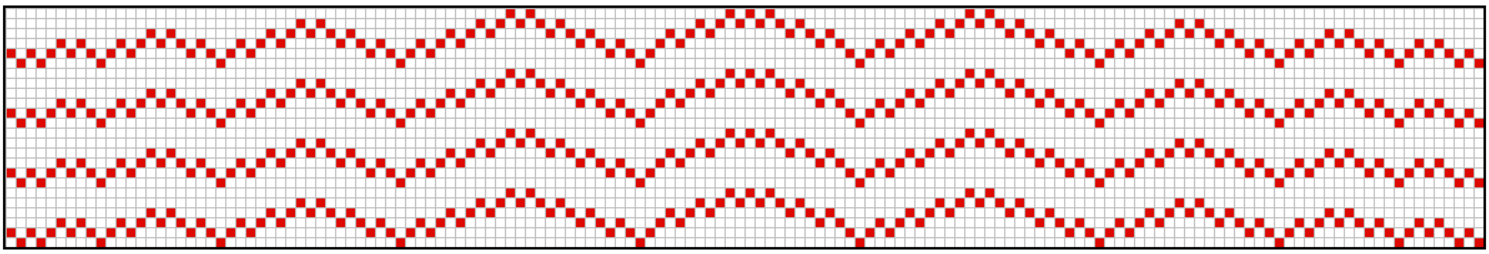
- Le calcul du carton C' fait par l'ordinateur est :
$C' = C \circ I^{-1} \circ B^{-1}$
$C' = C \circ B^{-1}$
On peut lire un deuxième calcul du carton C' qui est bien équivalent :
$C' = C \circ B^{-1} \circ (B \circ B^{-1})$
$C' = C \circ (B^{-1} \circ B) \circ B^{-1}$
$C' = C \circ I \circ B^{-1}$ $B^{-1} \circ B = I$ car la base B est injective
$C' = C \circ B^{-1}$

- Le calcul du rentrage R' fait par l'ordinateur est : $R' = B \circ R$
On peut lire un deuxième calcul du rentrage R' qui est bien équivalent :
$R' = (B \circ B^{-1}) \circ (B^{-1})^{-1} \circ R$
$R' = B \circ B^{-1} \circ B \circ R$
$R' = B \circ I \circ R$ $B^{-1} \circ B = I$ car la base B est injective
$R' = B \circ R$

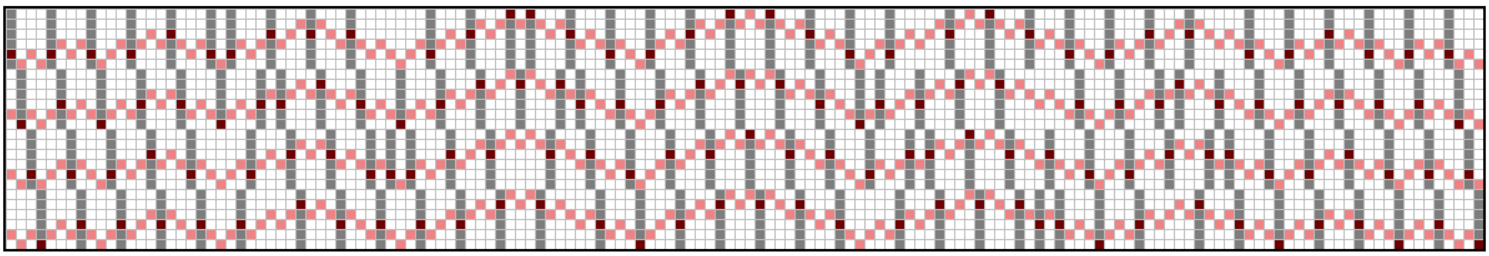
Procédons maintenant à l'intersection des rentrages $R'_1 \cap R'_2$, pour obtenir le rentrage R' :



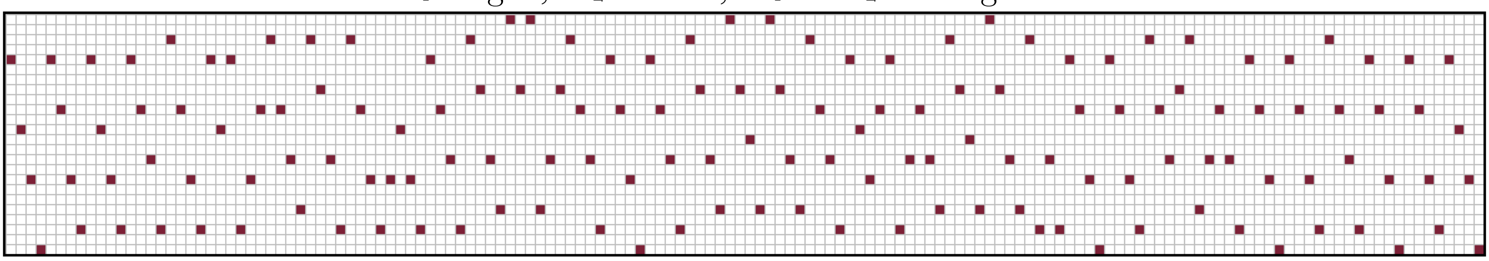
R'_1



R'_2



R'_1 en gris, R'_2 en rose, $R'_1 \cap R'_2$ en rouge foncé



$R' = R'_1 \cap R'_2$ en rouge foncé

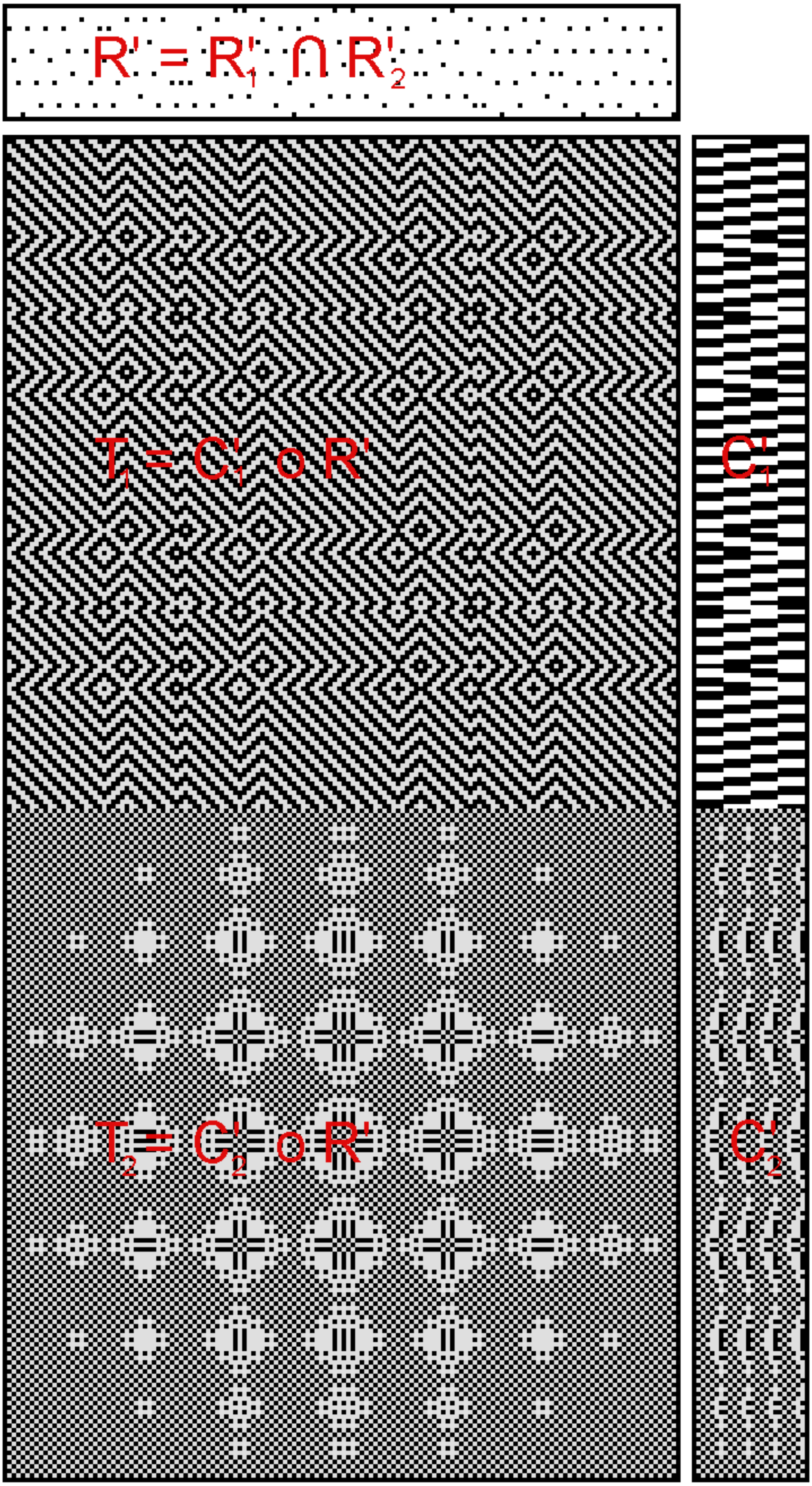
Le rentrage
$R' = R'_1 \cap R'_2$
peut produire indifféremment le tissu T_1 ou le tissu T_2 selon que l'on suive le carton C'_1 ou le carton C'_2 .

$R' = R'_1 \cap R'_2$

$T_1 = C'_1 \circ R'$
$T_2 = C'_2 \circ R$

R_1 et R_2 étant des rentrages,
$R' = R'_1 \cap R'_2$ en est un aussi. Chaque fil est rentré dans un cadre et un seul de R_1 , soit c_1 , et dans un cadre et un seul de R_2 , c_2. Il appartient donc au cadre unique de R' qui combine c_1 et c_2 et seulement à ce cadre.

Par contre il est possible que certains cadres de R' soient vides. C'est le cas dans cet exemple où R' a 12 cadres vides. Il suffit de les supprimer, ainsi que les colonnes correspondantes du carton pour obtenir un rentrage qui produit indifféremment les tissus T_1 ou T_2 , sur 12 cadres.



Cet exemple avait pour but de montrer la puissance du modèle de la formule de tissu et des diagrammes multiples.
Pour trouver directement un rentrage minimum qui produit indifféremment les tissus T_1 ou T_2 , il suffit avec Pointcarré de juxtaposer en hauteur T_1 et T_2 , puis d'analyser ce nouveau diagramme avec la fonction "Nouveau tissu armuré analysé".

Bien que d'apparence désordonnée le rentrage R' est capable d'engendrer deux familles de graphismes très structurées. Cet exemple est une belle démonstration de la nécessité d'une démarche abstraite pour pouvoir arriver à des rentrages aux telles possibilités graphiques ; c'est un des grands charmes du tissage à lames que de mettre en évidence la structure sous-jacente à tout graphisme de type géométrique.

Le prix à payer pour combiner deux rentrages, le nombre de cadres du premier rentrage multiplié par le nombre de cadres du second, peut paraître lourd. Fort heureusement il peut être plus faible dans bien des cas.
Imaginez que nous combinions deux rentrages qui respectent la toile, fils pairs fils impairs c.-à-d. qui sont dessinés sur un "réseau de toile", ou encore, si vous préférez sur une initiale suivie de 2. Pour tous les cadres pairs, seules les cases paires seront cochables, et, pour tous les cadres impairs seuls les cases impaires seront cochables. Un cadre pair et un cadre impair n'auront donc jamais de fils en commun, leur intersection sera vide. Dans toutes les intersections possibles entre les deux rentrages, environ la moitié sera entre des cadres pairs et des cadres impairs, donc la moitié des cadres de R' sont vides. Un cadre vide est un cadre qui ne sert à rien ! on peut donc l'enlever... La combinaison d'un rentrage de n cadres et d'un rentrage sur p cadres dessinés sur un "réseau de toile" donne un rentrage combiné de np/2 cadres (ou de (np+1)/2 si n et p sont tous les deux impairs), et non de np comme on aurait pu le supposer.
Avec des rentrages sur réseaux d'initiales plus grandes le nombre de cadres du rentrage combiné est spectaculairement plus faible que le produit du nombre des cadres des rentrages. Si les rentrages ont d'autres propriétés communes ce nombre peut encore être diminué.
En fait le nombre de cadres d'un rentrage combiné est fonction du degré de ressemblance entre les deux rentrages de départ. A la limite si on combine deux rentrages équivalents, le rentrage combiné aura le même nombre de cadres que les rentrages initiaux ; il leur sera d'ailleurs équivalent.

La combinaison de rentrages offre de nombreuses possibilités de recherches. Pourquoi ne pas combiner plus de deux rentrages ? Combiner des lignes graphiques contradictoires. Etc ...

Si cet article vous a plu, encouragez-moi à en écrire d'autres !
Soutenez-moi sur les réseaux sociaux.
Pour savoir comment faire : Comment me soutenir ?

Pour être informé de la parution de nouveaux articles : abonnez-vous
Pour toute question ou commentaire : ol@oliviermasson.art.